बोर्ड परीक्षा परिणाम उन्नयन हेतु ऐतिहासिक पहल ...

शेखावाटी मिशन 100

सत्र: 2024-25

(कक्षा - 10)

गणित

पढ़ेगा राजस्थान

बढ़ेगा राजस्थान

विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम QR CODE स्कैन करें

कार्यालय: संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा, चूरू संभाग, चूरू (राज.)

संयोजक कार्यालय – संयुक्त निदेशक कार्यालय, चूरू संभाग, चूरू

शेखावाटी मिशन - 100 मार्गदर्शक

बजरंग लाल

संयुक्त निदेशक (स्कूल शिक्षा)
चूरू संभाग, चूरू

महेन्द्र सिंह बड़सरा

संभागीय कॉर्डिनेटर, शेखावाटी मिशन 100
संयुक्त निदेशक कार्यालय, चूरू संभाग, चूरू

संकलनकर्त्ता टीम : गणित

रामावतार भदाला

तकनीकी सहयोगी शेखावाटी मिशन 100

राकेश कुमार

रा. उ. मा. वि. - टोडी माधोपुरा,
(सीकर)

राकेश कुमार पूनियां

रा. उ. मा. वि. - रोसावां
फतेहपुर (सीकर)

हेमराज सैनी

रा. उ. मा. वि. - सुजावास
(सीकर)

रवि शंकर गौड़

म. गाँ. रा. वि. -चौकड़ी
(सीकर)

भाना राम

रा. उ. मा. वि. - सांवलोदा
पुरोहितान (सीकर)

संजय कुमार शर्मा

रा. उ. मा. वि. - बराल
(सीकर)

नरेश कुमार

म. गाँ. रा. वि. - बलारां
(सीकर)

मुकेश कुमार

पीएम श्री. रा. उ. मा. वि.
दांतारामगढ़ (सीकर)

मुकेश पारीक

रा. उ. मा. वि. - नांगल नाथूसर
श्रीमाधोपुर (सीकर)

कार्यालय: संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा, चूरू संभाग, चूरू (राज.)

प्रश्न—पत्र की योजना2024—2025

कक्षा —10th
विषय —गणित
अवधि — 3घण्टे 15 मिनट पूर्णांक— 80

1. उद्देश्य हेतुअंकभार—

क्र.सं.	उद्देश्य	अंकभार	प्रतिशत
1.	ज्ञान	24	30
2.	अवबोध	24	30
3.	ज्ञानोपयोग	16	20
4.	कौशल	8	10
5.	विश्लेषण	8	10
	योग	80	100

2. प्रश्नों के प्रकारवारअंकभार—

क्र.सं.	प्रश्नों का प्रकार	प्रश्नों की संख्या	अंक प्रतिप्रश्न	कुलअंक	प्रतिशत (अंको का)	प्रतिशत (प्रश्नों का)	संभावित समय
1.	बहुविकल्पात्मक	18	1	18	22.5	33.96	36
2.	रिक्तस्थान	6	1	6	7.5	11.32	15
3.	अतिलघुत्तरात्मक	12	1	12	15.0	22.64	42
4.	लघुत्तरात्मक	10	2	20	25.0	18.87	40
5.	दीर्घउत्तरीय	4	3	12	15.0	7.55	32
6.	निबंधात्मक	3	4	12	15.0	5.66	30
	योग	53		80	100	100	195 मिनट

विकल्प योजना : खण्ड 'स' एवं 'द' में हैं

3. विषय वस्तु का अंकभार—

क्र.सं.	विषय वस्तु	अंकभर	प्रतिशत
1	वास्तविक संख्याए	4	5
2	बहुपद	4	5
3	दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म	4	5
4	द्विघात समीकरण	4	5
5	समान्तर श्रेणियां	6	7.50
6	त्रिभुज	4	5
7	निर्देशांक ज्यामिति	7	8.75
8	त्रिकोणमितिका परिचय	8	10.00
9	त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग	5	6.25
10	वृत	6	7.50
11	वृत्तो से संबधित क्षेत्रफल	5	6.25
12	पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	6	7.50
13	सांख्यिकी	13	16.25
14	प्राथिकता	4	5
	योग	80	100

BSER

प्रश्न–पत्र ब्ल्यूप्रिन्ट 2024–2025

कक्षा –10th विषय :–गणित समय :– 3घण्टे 15 मिनट पूर्णांक– 80

क्र. सं.	उद्देश्य इकाई/उपइकाई	ज्ञान						अवबोध						ज्ञानोपयोग						कौशल						विश्लेषण						योग
		बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	
1	वास्तविक संख्याए	1(1)																								1(1)			2(1)			4(3)
2	बहुपद							1(1)																		1(1)			2(1)			4(3)
3	दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म	1(1)						1(1)																					2(1)			4(3)
4	द्विघात समीकरण																		4(1)*													4(1)
5	समान्तर श्रेणियां		1(1)			3(1)*											2(1)															6(3)
6	त्रिभुज	1(1)						1(1)															2(1)									4(3)
7	निर्देशांक ज्यामिति	1(1)							1(1)		2(1)							3(1)*														7(4)
8	त्रिकोणमितिका परिचय	1(1)					4(1)*		1(1)								2(1)															8(4)
9	त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग	1(1)												1(1)						1(1)			2(1)									5(4)
10	वृत											3(1)*								1(1)			2(1)									6(3)
11	वृत्तो से संबधित क्षेत्रफल	1(1)		1(1)										1(1)			2(1)															5(4)
12	पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	1(1)		1(2)						1(2)					1(1)																	6(6)
13	सांख्यिकी		1(1)	1(2)					1(1)	1(2)		3(1)*	4(1)*																			13(8)
14	प्राथिकता	1(1)		1(1)						1(2)																						4(4)
	योग	9(9)	2(2)	6(6)		3(1)	4(1)	3(3)	3(3)	6(6)	2(1)	6(2)	4(1)	2(2)	1(1)		6(3)	3(1)	4(1)	2(2)			6(3)			2(2)			6(3)			
	सर्वयोग	24(19)						24(16)						16(8)						8(5)						8(5)						80(53)

अध्याय 1

वास्तविक संख्याएँ

बहुविकल्प प्रश्न - 2, अंक (2), लघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (2) कुल अंक = 4

❖ **परिमेय संख्याएँ :- ऐसी संख्याएं जिनको $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सके। जहाँ p,q पूर्णांक संख्या है तथा $q \neq 0$ परिमेय संख्याएँ कहलाती है।**

उदा.- $\frac{22}{7}$, $\sqrt{225}$, $\frac{4\sqrt{2}}{7\sqrt{2}}$, $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$, 0 , $\frac{1}{-3}$, $\frac{-2}{-3}$ आदि

❖ **अपरिमेय संख्याएँ :- ऐसी संख्याएं जिनको $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सके। अपरिमेय संख्याएँ कहलाती है।**

उदा. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2-\sqrt{5}, 2.23606........, 2+\sqrt{2}$ आदि

❖ **वास्तविक संख्याएँ :- सभी परिमेय संख्या और अपरिमेय संख्याओं को सम्मिलित रूप से लिखने पर वास्तविक संख्या प्राप्त होती है।**

उदा. - $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \frac{22}{7}, \frac{1}{2}, \frac{-3}{2}$ आदि

महत्वपूर्ण तथ्य:-

1. एक परिमेय तथा एक अपरिमेय संख्या का योग या अंतर एक अपरिमेय संख्या होती है।
2. एक अशुन्य - परिमेय संख्या तथा एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल तथा भागफल एक अपरिमेय संख्या होती है।
3. यदि दो अपरिमेय संख्याओं को जोड़े, घटाये, भाग दे या गुणा करने पर परिमेय या अपरिमेय संख्या दोनों में से कुछ भी आ सकता है।

❖ **अंकगणित की आधारभूत प्रमेय:- प्रत्येक भाज्य संख्या का अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है तथा यह गुणनखण्ड, अभाज्य गुणनखण्डों के आने के क्रम के बिना अद्वितीय होते है।**

महत्वपूर्ण:- संख्या 1 न तो अभाज्य है तथा न ही भाज्य।

❖ **बहुविकल्प प्रश्न :-**

1. निम्नलिखित में से कौनसी अपरिमेय संख्या नहीं है-

(1) $\sqrt{10}$ (2) $\sqrt{24}$
(3) $\sqrt{35}$ (4) $\sqrt{121}$ (4)

2. $2-\sqrt{3}$ है-

(1) परिमेय संख्या (2) अपरिमेय संख्या
(3) सम संख्या (4) पूर्णांक संख्या (2)

3. π एक है -

(1) परिमेय संख्या (2) अपरिमेय संख्या
(3) वास्तविक संख्या (4) 2 व 3 दोनों (4)

4. दो संख्याओं का म.स. 15 व ल.स. 105 है। यदि उनमें से एक 5 है। तो दूसरी संख्या क्या होगी -

(1) 75 (2) 15
(3) 315 (4) 525 (3)

5. निम्न में से अपरिमेय संख्या है-

(1) 2 (2) 2.232425......
(3) $2.\overline{23}$ (4) $\frac{22}{7}$ (2)

6. 144 के अभाज्य गुणनखण्डों में 2 की घात है-

(1) 4 (2) 5
(3) 6 (4) 3 (1)

7. यदि P^2 एक सम संख्या है तो P एक:-

(1) विषम संख्या है (2) सम संख्या है
(3) कह नहीं सकते (4) इनमें से कोई नहीं (2)

8. यदि संख्या a तथा 18 का LCM = 36 तथा a और 18 का HCF= 2 है तो a का मान होगा -

(1) 1 (2) 2
(3) 5 (4) 4 (4)

9. संख्याओं 96 और 404 का म.स. होगा -

(1) 16 (2) 12

(3) 8 (4) 4 (4)

10. यदि दो परिमेय संख्याओं के लिए HCF = LCM हो तो संख्याऐं होगी।

(1) भाज्य (2) समान

(3) अभाज्य (4) सहअभाज्य (2)

11. 144 व 198 का महत्तम समावर्त्य (HCF) क्या होगा-

(1) 18 (2) 24

(3) 36 (4) 72 (1)

12. 156 को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में क्या लिखेंगे।

(1) $2^2 \times 3^2 \times 13^2$ (2) $2^2 \times 3^1 \times 13^1$

(3) $2^1 \times 3^1 \times 13^1$ (4) $2^1 \times 3^2 \times 5^1$ (2)

13. दो परिमेय संख्याओं के बीच कितनी परिमेय संख्याएँ होती है।

(1) एक (2) दो

(3) शून्य (4) अनन्त (4)

14. दो संख्याओं a व b का HCF क्या होगा-

(1) शून्य (2) दो

(3) एक (4) अनन्त (3)

◈ लघुत्तरात्मक प्रश्न :-

15. सिद्ध कीजिए कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है-

हल : माना $3+2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$$\therefore 3+2\sqrt{5}=\frac{a}{b}, \quad b \neq 0 \qquad ....(1)$$

जहाँ a, b पूर्णांक सह अभाज्य संख्याएँ है

समीकरण (1) से

$$2\sqrt{5}=\frac{a}{b}-3$$

$$\text{या } \sqrt{5}=\frac{a-3b}{2b} \qquad ......(2)$$

चूँकि a, b पूर्णांक संख्याएँ है अतः $\frac{a-3b}{2b}$ एक परिमेय संख्या प्राप्त होगी। अतः समीकरण (2) से परिणाम प्राप्त होता है कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है जबकि हम जानते है कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है अतः यह परिणाम विरोधाभाषी है अतः हमारी परिकल्पना कि $3+2\sqrt{5}$ परिमेय संख्या है जो कि गलत है।

इससे सिद्ध होता है कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

16. जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए संख्या 6^n अंक शून्य पर समाप्त हो सकती है।

हल : हम जानते है कि कोई भी धनात्मक पूर्णांक जो शून्य पर समाप्त होता है वह अंक 5 से भाज्य होता है अर्थात उस धनात्मक पूर्णांक का एक गुणनखण्ड 5 होना चाहिए। यहाँ किसी n के लिए संख्या 6^n धनात्मक पूर्णांक है जो शून्य पर समाप्त होता है। अतः गुणनखण्ड करने पर

$$6^n = (2\times3)^n = 2^n\times3^n$$

इस प्रकार 6^n के गुणनखण्ड में 2 एवं 3 के अतिरिक्त अभाज्य गुणनखण्ड नहीं है अर्थात गुणनखण्ड में अंक 5 नहीं है। अतः 6^n किसी भी प्राकृत संख्या n के लिए 0 अंक पर समाप्त नहीं होगा।

17. अभाज्य गणुनखण्ड विधि द्वारा 510 और 92 का महत्तम समापवर्तक और लघुत्तम समावर्तक ज्ञात किजिए।

हल. $510 = 2\times3\times5\times17$

$92 = 2\times2\times23$

HCF (510, 92) $= 2^1$

$= 2$

LCM (510, 92) $= 2\times2\times3\times5\times17\times23$

$=2^2\times3\times5\times17\times23$

$=23460$

18. दो संख्याओं 90 व 144 का LCM = 720 होतो HCF ज्ञात करों।

हल. दो संख्याओं के LCM व HCF में निम्न सम्बन्ध होता है-

दो संख्याओं का गुणनफल= LCM × HCF

$90 \times 144 = 720 \times \text{HCF}$

$$HCF = \frac{90 \times 144}{720}$$

HCF = 18

19. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल. माना कि $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

$\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ (जहाँ a, b सहअभाज्य पूर्णांक है)

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$3 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$3b^2 = a^2$$

अत: 3, a^2 को विभाजित करेगा।

इसलिए 3,a को विभाजित करेगा।

माना a = 3c, जहाँ c एक पूर्णांक है

$3b^2 = (3c)^2$

$3b^2 = 9c^2$

$b^2 = 3c^2$

अत: 3, b^2 को विभाजित करेगा

इसलिए 3, b को विभाजित करेगा।

अत: a व b में कम से कम एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 3 है।

परन्तु यह इस तथ्य का विरोध करता है कि a और b सह अभाज्य पूर्णांक है।

अत: हमारी परिकल्पना गलत है।

अत: $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

20. सिद्ध कीजिए कि 5- $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है

हल. माना कि 5- $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है। अत: इसे $\frac{P}{Q}$ इस में लिख सकते हैं।

$$5 - \sqrt{3} = \frac{P}{Q}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = 5 - \frac{P}{Q}$$

$\because$ P, Q, 5 सभी पूर्णांक है।

$\therefore$ $5 - \frac{P}{Q}$ एक परिमेय संख्या है।

तो $\sqrt{3}$ भी एक परिमेय संख्या होगी, जो इसका विरोध करता है कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। इसलिए हमारी परिकल्पना गलत है।

अत: $5 - \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

21. सिद्ध कीजिए कि $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल. माना $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अत: $7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ (जहाँ a तथा b सहअभाज्य पूर्णांक है b $\neq 0$)

$$\sqrt{5} = \frac{a}{7b}$$

$\therefore$ $\frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore$ $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी, जो कि इस तथ्य का विरोधाभास है कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

यह विरोधाभास हमारी गलत परिकल्पना के कारण उत्पन्न हुआ।

अत: $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

22. दो संख्याओं 306 और 657 का HCF = 9 हो तो LCM ज्ञात करों -

हल: दो संख्याओं कें LCM व HCF में निम्न सम्बन्ध होता है -

दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM

306 × 657 = 9 × LCM

$$LCM = \frac{306 \times 657}{9}$$

$LCM = 22338$

23. अभाज्य गुणनखण्ड विधि से 6 , 72 और 120 का LCM व HCF ज्ञात करें।

हल: $6 = 2 \times 3 = 2^1 \times 3^1$

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$

$LCM\ (6, 72, 120) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

$= 8 \times 9 \times 5$

$= 360$

$HCF\ (6, 72, 120) = 2^1 \times 3^1$

$= 2 \times 3$

$= 6$

❖❖❖

@SHEKHAWAT
IMISSION100

शेखावाटी मिशन 100 की कक्षा 10 एवं 12 के विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम QR CODE स्कैन करें।

अध्याय 2

बहुपद

बहुविकल्प प्रश्न - 2, अंक (2), लघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (2) कुल अंक = 4

❖ **बहुपद :- ऐसा बीजीय व्यंजक जिसमें उपस्थित चर राशि की घात एक पूर्ण संख्या हो। बहुपद कहलाता है तथा चर राशि की उच्चतम घात ही बहुपद की घात होती है।**

उदा. $4x+5$, $3x^2+x+4$, $2-x^2$, $4x^0$, $\sqrt{3}\,a+\sqrt{7}$, $\sqrt{5}t^2$, $3x^3-2x^2+x-1$ आदि

❖ **रैखिक बहुपद:- ऐसा बहुपद जिसमें उपस्थित चर राशि की घात एक हो। रैखिक बहुपद कहलाता है।**

❖ **x चर राशि के रैखिक बहुपद को $p(x)=ax+b$ जहाँ a, b वास्तविक संख्या है तथा $a \neq 0$**

उदा. $P(x)=4x+5$, $P(x)=5x$, $P(x)=2x+3$, $P(x)=\sqrt{3}x+5$

❖ **द्विघात बहुपद :- ऐसा बहुपद जिसमें उपस्थित चर राशि की घात 2 हो। द्विघात बहुपद कहलाता है।**

❖ x चर राशि में द्विघात बहुपद को $p(x)=ax^2+bx+c$ से लिखते है, जहाँ a, b, c तीन वास्तविक संख्या है तथा $a \neq 0$

उदा. $p(x)=x^2+2x+1$, $p(x)=x^2-4$, $p(x)=5x^2$, $p(x)=\sqrt{3}x+2-x^2$

❖ **बहुपद के शुन्यक :- एक वास्तविक संख्या K बहुपद $p(x)$ का शुन्यक कहलाती है। यदि $p(k)=0$**

अर्थात् बहुपद में उपस्थित चर राशि का वह मान जिसको बहुपद में रखने पर 0 प्राप्त हो। चर राशि का वह मान बहुपद का शुन्यक कहलाता है।

❖ **जितनी बहुपद की घात होगी। उतने ही बहुपद के शुन्यक होगें।**

❖ **बहुपद के शुन्यकों व गुणांको में सम्बन्ध:-**

1. रैखिक बहुपद $p(x) = ax+b$ का शुन्यक $= \frac{-b}{a} = \frac{-(\text{अचरपद})}{x \text{ का गुणांक}}$

2. द्विघात बहुपद $p(x)=ax^2+bx+c$ के दो शुन्यक माना कि α और β है तो

शुन्यकों का योग $= \alpha+\beta = \frac{-b}{a} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शुन्यकों का गुणनफल $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

❖ **महत्वपूर्ण तथ्य:-**

❖ **जब शुन्यकों का योग और शुन्यकों का गुणनफल दिया हुआ हो तो द्विघात बहुपद ज्ञात करने का सूत्र**

x^2- (शुन्यकों का योग)x+ शुन्यकों का गुणनफल

◈ **बहुविकल्प प्रश्न :-**

1. **निम्न में से बहुपद है -**

(1) $\sqrt{3}x^2+4$ (2) $3\sqrt{x}+1$

(3) $y+\frac{2}{y}$ (4) $3\sqrt{t}+t\sqrt{2}$ (1)

2. **निम्न में से रैखिक बहुपद है -**

(1) $4x^2-3$ (2) $4x-1$

(3) $x^2+\frac{1}{x^2}$ (4) 5 (2)

3. **निम्न में से द्विघात बहुपद है-**

(1) $3x+4$ (2) 4

(3) $x+\frac{1}{x^2}$ (4) $2x^2-3x+1$ (4)

4. **बहुपद $p(x)=4x^2+7x-5x^3$ की घात है -**

(1) 4 (2) 0

(3) 3 (4) 2 (3)

5. **बहुपद $p(t)=t^2-15$ के शुन्यक होंगे -**

(1) 15, 15 (2) -15, 15

(3) $\sqrt{15},\sqrt{15}$ (4) $\sqrt{15},-\sqrt{15}$ (4)

6. **बहुपद $p(x)=ax^2+bx+c$ में शुन्यकों का गुणफल होगा?**

(1) $\frac{-b}{a}$ (2) 1

(3) $\frac{-b}{c}$ (4) $\frac{c}{a}$ (4)

7. बहुपद $p(x)=ax^2+bx+c$ में शुन्यकों का योग होगा?

(1) $\frac{-b}{a}$ (2) 1

(3) $\frac{-b}{c}$ (4) $\frac{c}{a}$ (1)

8. यदि बहुपद $p(x)=x^2-2x+5$ के शुन्यक a, b है तो ab का मान क्या होगा?

(1) -2 (2) 5

(3) 3 (4) -5 (2)

9. यदि बहुपद $2x^2+x+k$ का शुन्यक 3 है तो k का मान होगा-

(1) 12 (2) 21

(3) 24 (4) -21 (4)

10. यदि किसी बहुपद के शुन्यक $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ है तो बहुपद के गुणनखण्ड क्रमशः होगें:-

(1) $(x-2), (x-2)$ (2) $(x+\sqrt{2})$ $(x+2)$

(3) $(x-\sqrt{2}), (x+\sqrt{2})$

(4) $(x+\sqrt{2}), (x+\sqrt{2})$ (3)

11. बहुपद के शुन्यकों का योगफल तथा गुणनफल क्रमशः0 और $\sqrt{5}$ हो तो बहुपद होगा -

(1) x^2-x+5 (2) $x^2-\sqrt{5}$

(3) $x^2+\sqrt{5}$ (4) $x^2-2x+\sqrt{5}$ (3)

12. एक द्विघात बहुपद के शून्यकों की अधिकतम संख्या क्या होती है?

(1) 0 (2) 3

(3) 1 (4) 2 (4)

◈ लघुत्तरात्मक प्रश्न -

13. बहुपद $p(x)=x^2-2x-8$ के शुन्यक ज्ञात कीजिए।

हल. $\Rightarrow x^2-2x-8=0$

$\Rightarrow x^2-4x+2x-8=0$

$\Rightarrow x(x-4)+2(x-4)=0$

$\Rightarrow (x-4)(x+2)=0$

$\Rightarrow x-4=0, x+2=0$

$\Rightarrow x=4, x=-2$

बहुपद के शुन्यक 4, -2 होगें।

14. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः -3 और 2 है।

हल. माना कि द्विघात बहुपद के शुन्यक α, β है

$\alpha+\beta=-3$

$\alpha\beta=2$

द्विघात बहुपद = $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

$= x^2+3x+2$

15. द्विघात बहुपद $p(x)=6x^2-3-7x$ के शुन्यक ज्ञात कीजिए व शुन्यको व गुणाको में सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल. $p(x)=6x^2-3-7x$

$p(x)=6x^2-7x-3$

$p(x)=6x^2+(-7)x+(-3)$.............(1)

बहुपद का शुन्यक समीकरण - $P(x) = 0$

$6x^2-7x-3 = 0$

$6x^2-9x+2x-3 = 0$

$3x(2x-3)+1(2x-3) = 0$

$(2x-3)(3x+1) = 0$

यहाँ $2x-3=0, 3x+1=0$

$2x=3, 3x = -1$

$x = \frac{3}{2}$, $x = \frac{-1}{3}$

अत: शुन्यक $\frac{3}{2}, \frac{-1}{3}$ होगें।

शुन्यक का योग $= \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$

शुन्यकों का गुणनफल $= \frac{3}{2} \times \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-1}{2}$

व्यापक द्विघात बहुपद से तुलना करने पर

$a = 6, b = -7, c = -3$

शुन्यकों व गुणांकों में सम्बन्ध -

शुन्यकों का योग $= \frac{-b}{a} = \frac{-(-7)}{6} = \frac{7}{6}$

शुन्यकों का गुणनफल $= \frac{c}{a} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$

अत: शुन्यकों और गुणांकों के मध्य संबंध सत्य है।

16. यदि द्विघात व्यंजक $Kx^2+5x+3k$ के शुन्यकों का योग, उनके गुणनफल के बराबर हो, तो k का माना ज्ञात

कीजिए।

हल. द्विघात व्यंजक $kx^2+5x+3k$ की तुलना द्विघात व्यंजक ax^2+bx+c से करने पर -

$a = k$, $b = 5$, $c = 3k$

शुन्यकों का योग $= \frac{-b}{a} = -\frac{-5}{k}$

शुन्यकों का गुणनफल $= \frac{c}{a} = \frac{3k}{k} = 3$

प्रश्नानुसार, शुन्यकों का योग = शुन्यकों का गुणनफल

$\frac{-5}{k} = 3$

$k = \frac{-5}{3}$

17. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिनके शुन्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः दी गई संख्याएँ हैं :- $\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}$

हल. माना कि बहुपद ax^2+bx+c है तथा इसके शुन्यक α और β है।

तब $\alpha+\beta = \frac{-1}{4} = \frac{-b}{a}$

तथा $\alpha\beta = \frac{1}{4} = \frac{c}{a}$

यदि $a = 4$, $b = 1$, $c = 1$ हो तो

द्विघात बहुपद $4x^2+x+1$ होगा।

18. $p(x)=x^2-3x-4$ का $x=-1$ पर मान ज्ञात कीजिए।

उ. बहुपद $p(x)=x^2-3x-4$

$x=-1$ रखने पर

$p(-1)=(-1)^2-3(-1)-4$

$p(-1)=1+3-4$

$p(-1)=4-4$

$p(-1)=0$

19. रैखिक बहुपद $p(x)=3x-4$ के शुन्यक ज्ञात करो।

उ. माना कि $p(x)$ बहुपद का शुन्यक k है तो

$p(k)=0$

अत: $3x-4=0$

$3x=4$

$x=\frac{4}{3}$

अत: $x = \frac{4}{3}$ बहुपद का शुन्यक होगा।

❖❖❖

@SHEKHAWAT
IMISSION100

शेखावाटी मिशन 100 की कक्षा 10 एवं 12 के विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम QR CODE स्कैन करें।

अध्याय 3

दो चर वाले रैखिक समीकरण - युग्म

बहुविकल्प प्रश्न - 2, अंक (2), लघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (2) कुल अंक = 4

❖ **रैखिक समीकरण** - **ऐसा समीकरण जिसमें उपस्थित चर की घात एक हो, रैखिक समीकरण कहलाता है।**

❖ **दो चर वाला रैख्कि समीकरण** - **जब समीकरण में दो चर उपस्थित हो और दोनों की घात एक-एक हो।**

❖ **दो चर वाले रैखिक समीकरण का युग्म का व्यापक रूप-**

$a_1x+b_1y+c_1=0$ जहाँ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$-वास्तविक संख्याएँ है।

$a_2x+b_2y+c_2=0$ x,y - चर है।

❖ **दो चर वाले रैखिक समीकरण का आलेखन (ग्राफ) करने पर एक सरल रेखा प्राप्त होती है। अत: समीकरण युग्म में दो सरल रेखाएँ एक समतल पर प्राप्त होगी। जिनकी स्थितियाँ -**

क्र.म.	अनुपातों की तुलना	ग्राफीक निरूपण	बीजगणितीय निरूपण	संगत /असंगत
1.	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	प्रतिच्छेदी रेखाएँ	केवल एक हल (अद्वितीय हल)	संगत
2.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	संपाती रेखाएँ	अपरिमित रुप से अनेक हल	संगत
3.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	समान्तर रेखाएँ	कोई हल नहीं	असंगत

❖ **रैखिक समीकरणों को हल करने की बीजगणितीय विधि-**

1. **प्रतिस्थापन विधि** - इसमें एक चर का मान दूसरे चर के पद में व्यक्त करके रैखिक समीकरण युग्म को हल करने के लिए प्रतिस्थापित करते है।
2. **विलोपन विधि** - इसमें एक चर का विलोपन करके दूसरे चर का मान ज्ञात करते है।
3. **वज्र गुणन विधि**
4. **ग्राफीय विधि**

◈ **बहुविकल्प प्रश्न :-**

1. **$3x+2y=11$ को संतुष्ट करने वाला युग्म है -**

(1) (1, 4) (2) (2, 3)

(3) (3, 5) (4) (1, 3) (1)

2. **निम्न रैखिक समीकरण युग्म के हल है -**

$x + y = 14$; $x - y = 4$

(1) $x = 5, y = 9$ (2) $x = 1, y = 10$

(3) $x = 9, y = 5$ (4) $x = 4, y = 0$ (3)

3. **k के किस मान के लिए निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म का कोई हल नहीं है?**

$3x+y = 1$; $(2k-1)x+y = 2k+1$

(1) 1 (2) 2

(3) 3 (4) 4 (2)

4. **यदि समीकरण $y = mx+3$ में $x = -2$ व $y = 5$ प्रतिस्थापित करने पर m का मान होगा -**

(1) 1 (2) -1

(3) 0 (4) 2 (2)

5. **यदि $2x+y = 6$ हो तो इसको संतुष्ट करने वाला युग्म है -**

(1) (1, 2) (2) (2, 1)

(3) (2, 2) (4) (1, 1) (3)

6. **एक रैखिक समीकरण की घात होती है -**

(1) 0 (2) 2

(3) 1 (4) कोई नहीं (3)

7. दो रैखिक समीकरणों के आलेख प्रतिच्छेदी रेखाएँ है, तब रैखिक समीकरण युग्म का -

(1) कोई हल नहीं (2) अद्वितीय हल है

(3) दो हल है (4) अनेक हल हैं। (2)

8. दो रैखिक समीकरणों के आलेख समान्तर रेखाएँ है तब रैखिक समीकरण युग्म का -

(1) कोई हल नहीं (2) अद्वितीय हल है

(3) दो हल है (4) अनेक हल है (1)

9. युगपत समीकरण $2x+3y = 5$, $4x+6y = 9$ निकाय है-

(1) संगत (2) असंगत

(3) अ व ब दोनों (4) इनमें से कोई नहीं (2)

10. समीकरण $x + 2y = 9$ में यदि $x = 5$ हो तो y का मान क्या होगा -

(1) 1 (2) 2

(3) 4 (4) -2 (2)

11. समीकरण $4x + 2y = K$ में यदि $x = 2, y = 1$ हो तो k का मान होगा-

(1) 6 (2) 10

(3) 7 (4) 8 (2)

12. दो अंकों वाली संख्या होगी यदि इकाई का अंक x व दहाई का अंक y हो-

(1) 10x+y (2) 10y+x

(3) दोनों (4) इनमें से कोई नहीं (2)

13. समीकरण $x + y = 6$ में कितने हल होंगे?

(1) एक (2) दो

(3) अनंत (4) एक भी नहीं (3)

14. एक संख्या का तीन गुणा और दूसरी संख्या का दोगुने का अन्तर 9 है तो इसको बीजगणितीय रूप में लिखिए-

(1) $3x + 2y = 9$ (2) $3x - 2y = 9$

(3) $2x - 3y = 9$ (4) $2x + 3y = 9$ (2)

15. 7 सेवों और 4 संतरों का मूल्य 45 रु. है। इसको बीजगणितीय रूप में लिखिए-

(1) $7x + 4y = 45$ (2) $7x - 4y = 45$

(3) $7x + 3y = 35$ (4) $4x + 7y = 45$ (1)

◈ लघुतरात्मक प्रश्न

1. k किस मान के लिए समीकरण निकाय $3x-2y = 0$ तथा $kx + 5y = 0$ के अन्नत हल होंगे?

हल. समीकरण निकाय के अन्नत हल होगें यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$a_1 = 3, b_1 = -2, c_1 = 0$

$a_2 = k, b_2 = 5, c_2 = 0$

$\therefore \frac{3}{k} = \frac{-2}{5}$

$-2k = 15$

$\therefore k = \frac{-15}{2}$

2. समीकरण युग्म को हल कीजिए -

$x + y = 14$, $x - y = 4$

हल. $x + y = 14$.............. (1)

$x - y = 4$ .... (2)

समी. (1) व (2) को जोड़ने पर

$x + y = 14$

$x - y = 4$

$2x = 18$

$x = \frac{18}{2} = 9$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर

$9 + y = 14$

$y = 14 - 9 = 5$

अत: $x = 9, y = 5$

3. निम्न रैखिक समीकरण युग्म को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए -

$s - t = 3$, $\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

हल. दिये गये समीकरण युग्म

$s - t = 3$ .... (1)

तथा $\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

$\frac{2s+3t}{6} = \frac{6}{1}$

वज्र गुणा करने पर

$2s + 3t = 36$ .... (2)

समी. (1) से s = 3 + t .... (3)

समी. (3) से s का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर

2 (3 + t) + 3t = 36

6 + 2t + 3t = 36

6 + 5t = 36

या 5t = 36 - 6

या 5t = 30

$t = \frac{30}{5} = 6$

t का मान समी. (1) में रखने पर

s - 6 = 3

s = 3 + 6 = 9

$\therefore$ s = 9, t = 6

4. निम्न रैखिक समीकरण युग्म को विलोपन विधि से हल कीजिए -

$x + y = 5$ व $2x - 3y = 4$

हल. दिये गये समीकरण -

$x + y = 5$ .... (1)

$2x - 3y = 4$ .... (2)

समी. (1) को 2 से गुणा करने पर

$2x + 2y = 10$ .... (3)

समी. (3) में से समी. (2) को घटाने पर

$2x + 2y = 10$

$\underset{-}{2x} \underset{+}{-3y} = \underset{-}{4}$

$5y = 6$

$y = \frac{6}{5}$

y का मान समी. (1) में रखने पर -

$x + \frac{6}{5} = 5$

$x = \frac{5}{1} - \frac{6}{5}$

$x = \frac{25-6}{5} = \frac{19}{5}$

$\therefore x = \frac{19}{5}$ व $y = \frac{6}{5}$

5. दो संख्याओं का अन्तर 26 है और एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। उन्हे ज्ञात कीजिए।

हल. माना दो संख्याएँ x व y है।

प्रश्नानुसार x - y = 26 .... (1)

पुनः प्रश्नानुसार x = 3y .... (2)

समी. (2) से x का मान समी. (1) में रखने पर

3y - y = 26

2y = 26

$y = \frac{26}{2}$

$\therefore$ y = 13

y का मान समी. (2) में रखने पर

$x = 3 \times 13 = 39$

अतः दो संख्याएँ 39 व 13 है।

6. दो सम्पूरक कोणों में बड़ा कोण छोटे कोण से 18 डिग्री अधिक है। उन्हे ज्ञात कीजिए।

हल. माना दो सम्पूरक कोण x व y है तथा $x > y$

प्रश्नानुसार $x + y = 180^0$............... (1) (सम्पूरक कोणों का योग 180^0 होता है।)

पुनः प्रश्नानुसार $x = y + 18^0$.......... (2)

समी. (2)से x का मान समी. (1)में रखने पर -

$y + 18^0 + y = 180^0$

$2y + 18^0 = 180^0$

$2y = 180^0 - 18^0$

$2y = 162^0$

$y = \frac{162}{2} = 81^0$

y का मान समी. (2)में रखने पर

$x = 81^0 + 18^0 = 99^0$

$\therefore$ कोण $99^0, 81^0$

7. यदि हम अंश में 1 जोड़ दे तथा हर में से 1 घटा दे, तो भिन्न 1 में बदल जाती है। यदि हर में 1 जोड़ दे तो यह $\frac{1}{2}$ हो जाती है, भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल. माना भिन्न का अंश = x व हर = y

अत: भिन्न $=\frac{x}{y}$

प्रश्नानुसार स्थिति -I

$$\frac{x+1}{y-1}=\frac{1}{1}$$

वज्र गुणा करने पर

$x + 1 = y - 1$

$\Rightarrow x - y = -2$ ...... (1)

प्रश्नानुसार स्थिति -II

$$\frac{x}{y+1}=\frac{1}{2}$$

वज्र गुणा

$\Rightarrow 2x = y + 1$

$\Rightarrow 2x - y = 1$ ...... (2)

समी. (2) में से (1) को घटाने पर

$$\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x - y = -2 \\ - \quad + \quad + \\ \hline x \quad = 3 \end{array}$$

x का मान सभी (1) में रखने पर

$3 - y = -2$

$-y = -2-3$

$-y = -5$

$\Rightarrow y = 5$

अत: भिन्न $=\frac{3}{5}$

◈ अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न -

1. एक आयाताकार बाग, जिसकी लम्बाई, चौड़ाई से 4 मी. अधिक है, का अर्द्धपरिमाप 36 मी. है। बाग की विभाएँ ज्ञात कीजिए।
2. पाँच वर्ष पूर्व नूरी की आयु सोनू की आयु की तीन गुनी थी। दस वर्ष पश्चात नूरी की आयु सोनू की आयु की दो गुनी हो जायेगी। नूरी और सोनू की आयु कितनी है।
3. दो अंकों की संख्या के अंकों का योग 9 है। इस संख्या का नौ गुना संख्या के अंकों को पलटने से बनी संख्या का दो गुना है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

❖❖❖

अध्याय
4

द्विघात समीकरण

निबंधात्मक प्रश्न - 1, अंक (4) कुल अंक = 4

❖ **श्रीधराचार्य सूत्र - द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c = 0$ के मूल श्रीधराचार्य सूत्र से** $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

चर के दो मान $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **प्राप्त होते है।**

❖ **द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के**

(i) दो भिन्न वास्तविक मूल होते है यदि b^2-4ac > 0 हो

(ii) दो बराबर वास्तविक मूल होते है यदि b^2-4ac = 0 हो,

(iii) कोई वास्तविक मूल नहीं होता, यदि b^2-4ac < 0 हो

❖ **द्विघात समीकरण बनाना जब मूलों का योग व गुणनफल दिया जाये -**

x^2 - (मूलों का योग)x + मूलों का गुणनफल = 0

$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$

◈ निबंधात्मक प्रश्न -

1. दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांको का गुणनफल 306 है। पूर्णांको को ज्ञात कीजिए।

हल. माना दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांक x व $x + 1$ है।

अत: प्रश्नानुसार $x \times (x + 1) = 306$

$\Rightarrow x^2 + x = 306$

$\Rightarrow x^2 + x - 306 = 0$

$x^2 + 18x - 17x - 306 = 0$

$x(x + 18) - 17(x + 18) = 0$

$(x + 18)(x - 17) = 0$

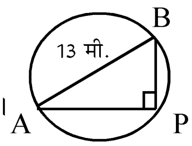
अत: $x + 18 = 0$ $x = - 18$ (ऋणात्मक पूर्णांक)

या $x - 17 = 0$ $x = 17$

$\therefore$ दो धनात्मक पूर्णांक $x = 17$

व $x + 1 = 17 + 1 = 18$ है।

2. 13 मीटर व्यास वाले एक वृताकार पार्क की परिसीमा के एक बिन्दु पर एक खम्भा इस प्रकार गाड़ना है कि इस पार्क के एक व्यास के दोनो अंत बिन्दुओं पर बने फाटको A और B से खम्भे की दूरियों का अंतर 7 मीटर हो। क्या करना संभव है? यदि है तो दोनों फाटकों से कितनी दूरियाँ पर खम्भा गाड़ना है?



हल. AB वृत्त का व्यास है।

जिसके सिरो A व B पर फाटक बने हैं।

खम्भे की स्थिति बिन्दु P पर है।

AB=13 मी.

माना खम्भे P की फाटक B से दूरी BP = x मी.

प्रश्नानुसार AP-BP = 7 मी.

$\therefore$ AP = 7 + BP = $(7 + x)$ मी.

AB व्यास है।

$\therefore \angle APB = 90^0$ (अर्धवृत का कोण समकोण होता है।)

$\therefore \Delta APB$ में पाइथोगोरस प्रमेय से -

$AP^2 + BP^2 = AB^2$

$(7 + x)^2 + x^2 = (13)^2$

$\Rightarrow 49 + 14x + x^2 + x^2 = 169$

$\Rightarrow 2x^2 + 14x + 49 = 169$

या $2x^2 + 14x + 49 - 169 = 0$

$2x^2 + 14x - 120 = 0$

या $x^2 + 7x - 60 = 0$

विविक्तिकर = b^2-4ac

$= (7)^2 - 4 \times 1 \times (-60)$

$= 49 + 240$

$= 289 > 0$

$\therefore$ द्विघात समीकरण के दो वास्तविक मूल है। अत: खम्भे को पार्क की परिसीमा पर गाड़ा जा सकना सम्भव है।

द्विघात समी. $x^2 + 7x - 60 = 0$

$x^2 + 12x - 5x - 60 = 0$

$x(x+ 12) - 5(x+12) = 0$

$\therefore (x - 5)(x + 12) = 0$

अत: $x-5 = 0 \Rightarrow x = 5$

$x + 12 = 0 \Rightarrow x = -12$ (ऋणात्मक)

$\therefore x$ खम्भे व फाटक B के मध्य दूरी है, जो धनात्मक है।

अत: $x = 5$ मी.

$\therefore$ खम्भे की फाटक B से दूरी BP = 5 मी.

खम्भे की फाटक A से दूरी AP = $7 + x = 7 + 5 = 12$ मी.

3. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 27 हो और गुणनफल 182 हो।

हल. माना पहली संख्या = x

$\therefore$ दूसरी संख्या = $27 - x$

प्रश्नानुसार $x \times (27-x) = 182$

$\Rightarrow 27x - x^2 = 182$

$\Rightarrow -x^2 + 27x - 182 = 0$

या $x^2 - 27x + 182 = 0$

या $x^2 - 13x - 14x + 182 = 0$

$x(x - 13) - 14(x - 13) = 0$

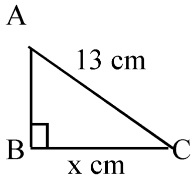
$\therefore (x - 13)(x - 14) = 0$

अत: $x - 13 = 0 \Rightarrow x = 13$

या $x - 14 = 0 \Rightarrow x = 14$

अत: दो धनात्मक पूर्णांक 13 और 14 या 14 और 13 है।

4. एक समकोण त्रिभुज की ऊँचाई इसके आधार से 7 सेमी. कम है। यदि कर्ण 13 सेमी. है, तो अन्य दो भूजाएँ ज्ञात कीजिए।



हल. माना समकोण त्रिभुज का आधार BC = x सेमी.

अत: समकोण त्रिभुज की ऊँचाई AB = (x - 7) सेमी.

कर्ण AC = 13 सेमी.

समकोण Δ ABC में पाइथोगोरस प्रमेय से -

कर्ण^2 = आधार^2 + लम्ब^2

$\Rightarrow AC^2 = BC^2 + AB^2$

$\Rightarrow (13)^2 = x^2 + (x - 7)^2$

$\Rightarrow 169 = x^2 + x^2 - 14x + 49$

$\Rightarrow 169 = 2x^2 - 14x + 49$

या $2x^2 - 14x + 49 - 169 = 0$

$2x^2 - 14x - 120 = 0$

$x^2 - 7x - 60 = 0$

$x^2 - 12x + 5x - 60 = 0$

$x(x-12) + 5(x - 12) = 0$

$\therefore (x - 12)(x + 5) = 0$

$x - 12 = 0 \quad x = 12$

या $x + 5 = 0 \quad x = -5$ (भुजा की लम्बाई ऋणात्मक नहीं होती)

$\therefore$ समकोण त्रिभुज का आधार BC = 12 सेमी.

ऊँचाई AB = 12 - 7 = 5 सेमी.

5. द्विघात समीकरण $2x^2 + kx + 3 = 0$ में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि द्विघात समीकरण के दोनों मूल बराबर हो।

हल. द्विघात समीकरण $2x^2 + kx + 3 = 0$

इस समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर

a = 2, b = k, c = 3

$\because$ द्विघात समीकरण के दोनों मूल बराबर है।

अत: विविक्तकर $b^2 - 4ac = 0$

$\Rightarrow (k)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 0$

$\Rightarrow k^2 - 24 = 0$

$k^2 = 24$

$k = \pm\sqrt{24}$

$k = \pm\sqrt{4 \times 6} = \pm 2\sqrt{6}$

$\therefore k = \pm 2\sqrt{6}$

6. द्विघात समीकरण $2x^2 - 6x + 3 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। यदि मूलों का अस्तित्व हो तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

हल. द्विघात समीकरण $2x^2 - 6x + 3 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर

a = 2, b = –6, c = 3

विविक्तिकर $= b^2 - 4ac$

$= (-6)^2 - 4 \times 2 \times 3$

$= 36 - 24$

$= 12 > 0$

अत: द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक व भिन्न है।

द्विघात समीकरण के मूल $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{12}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{12}}{4}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{2[3 \pm \sqrt{3}]}{4}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

अत: द्विघात समीकरण के मूल $x = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ व $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$ है।

7. एक कुटीर उद्योग एक दिन में कुछ खिलौने निर्मित करता है, प्रत्येक खिलौने का मूल्य (रुपयों में) 55 में से एक दिन में निर्माण किये गये खिलौने की संख्या को घटाने से प्राप्त संख्या के बराबर है। उस दिन निर्माण किये गये खिलौने की संख्या ज्ञात कीजिए।

8. निम्न द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए -

(i) $6x^2 - x - 2 = 0$

(ii) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

❖❖❖

अध्याय 5

समान्तर श्रेढ़ी (A.P.)

रिक्त स्थान प्रश्न - 1, अंक (1), लघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (2), दीर्घउत्तरात्मक प्रश्न -1, अंक (3) कुल अंक = 6

❖ समांतर श्रेढ़ी- संख्याओं का ऐसा अनुक्रम है जिसमें प्रथम पद को छोड़कर प्रत्येक पद अपने से ठीक पहले पद में एक अचर संख्या जोड़ने पर प्राप्त होता है।

❖ यह अचर संख्या (d) समांतर श्रेढ़ी (AP) का सार्वअन्तर कहलाता है, जो धनात्मक, ऋणात्मक या शुन्य हो सकता है।

❖ सार्व अन्तर (d) = अनुगामी पद - पूर्वगामी पद

❖ किसी A.P. का प्रथम पद 'a' तथा सार्व अन्तर 'd' हो A.P. का व्यापक रूप - a, a+d, a+2d, a+3d......

❖ A.P. का व्यापक पद (n वाँ पद) a_n = a+(n-1)d

❖ यदि अंतिम पद नहीं दिया हो तो m पदों वाली AP में, अन्त से n वां पद = शुरू से (m-n+1) वां पद

अर्थात अन्त से n वां पद = a+(m-n) d

❖ A.P. के प्रथम n पदों का योगफल, $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

❖ n पदों वाली A.P. का अंतिम पद 'l' हो तो $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$

❖ प्रथम n धनात्मक पूणार्कों का योगफल $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

❖ यदि a, b, c समांतर श्रेढ़ी में हैं तो 2b = a+c

यहाँ b, A.P. का समांतर माध्य कहलाता है।

❖ $a_n = S_n - S_{n-1}$

❖ $d = a_n - a_{n-1}$

Ex1. AP : $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}$,...... का प्रथम पद व सार्व अन्तर क्या हैं?

हलः- प्रथम पद $(a_1) = 3/2$, $a_2 - a_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

$$a_3 - a_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$a_4 - a_3 = -\frac{3}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right) = -1$$

अतः सार्व अन्तर (d) = -1

Ex2. AP: 3, 8, 13, ... 253 का अन्त से 20 वां पद ज्ञात करो।

हलः- प्रथम पद =3, सार्व अन्तर = 8-3=5

AP को उल्टा करने पर, प्रथम पद = 253, सार्व अन्तर = -5 अन्त से 20 वां पद = a + (n-1) d

= 253 + (20-1) (-5)

= 253 - 95

= 158

Ex3. AP: 5, x, y, $9\frac{1}{2}$ में x व y का मान ज्ञात करें।

हलः- प्रथम पद =5

अंतिम पद $(a_n) = 9\frac{1}{2} = \frac{19}{2}$

माना सार्व अंतर 'd' है तो $a_n = a + (n-1)d$

$$\Rightarrow \frac{19}{2} = 5 + (4-1)d$$

$$\Rightarrow \frac{9}{2} = 3d$$

$$\Rightarrow d = 3/2$$

$$x = 5 + 3/2 = 5\frac{3}{2}$$

$$y = 5\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 8$$

Ex4. AP: 24, 21, 18,........ के कितने पदों का योग 78 होगा?

हलः- प्रथम पद =24, सार्व अंतर (d) = 21-24= -3, S_n= 78, n=?

$$\because \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = S_n$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}[2\times 24 + (n-1)\times(-3)] = 78$$

$$\Rightarrow n(48-3n+3) = 156$$

$\Rightarrow 3n^2 - 51n + 156 = 0$

$\Rightarrow n^2 - 17n + 52 = 0$

$\Rightarrow (n-13)(n-4) = 0$

$\Rightarrow n = 4$ या $n = 13$ अत: AP के 4 पदों या13 पदों का योग 78 है।

◈ रिक्त स्थान-

1. **यदि 10, m,-2 समांतर श्रेढ़ी में हैं तो m का मान ...... है।**

हल:- 10, m,-2 A.P. है $\Rightarrow 2m = 10 + (-2)$

$\Rightarrow m = 4$

2. $AP: -3, -\frac{1}{2}, 2, ...$ का 11 वां पद .... है।

हल:- $a = -3, d = -\frac{1}{2} - (-3)$

$= -\frac{1}{2} + 3$

$= 5/2$

$a_{11} = -3 + (11-1) \times \frac{5}{2}$

$= -3 + 10 \times \frac{5}{2}$

$= 22$

3. **[ ], 13, [ ], 3 समांतर श्रेढ़ी में हैं।**

हल:- 18,8

4. **A.P. का व्यापक पद का सूत्र .... है।**

हल:- $a_n = a+(n-1)\,d$

5. **एक परिमित AP का अंतिम पद '*l*' है तो सभी पदों का योग सुत्र .... से प्राप्त होता हैं।**

हल:- $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

6. **प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं का योग .... होता है।**

हल:- $s_{10} = \frac{10 \times 11}{2} = 55$

7. **एक AP का n वां पद $a_n = 3+4n$ है तो सार्व अंतर .... होगा।**

हल:- $a_n = 3+4n$

$a_{n-1} = 3+4\,(n-1)$

$d = a_n - a_{n-1}$

$= 3 + 4n - 3 - 4(n-1)$

$= 3 + 4n - 3 - 4n + 4$

$= 4$

8. **AP: 7, 13, 19,........, 205 में पदों की संख्या .... है।**

हल:- $a_n = a + (n-1)d$

$\Rightarrow 205 = 7 + (n-1) \times 6$

$\Rightarrow 198 = 6n - 6$

$\Rightarrow 6n = 204$

$\Rightarrow n = 34$

◈ लघुत्तरात्मक प्रश्न -

1. **AP ज्ञात कीजिए जिसका तीसरा पद 5 है तथा सातवां पद 9 है।**

हल:- माना AP का प्रथम पद 'a' तथा सार्व अंतर 'd' है।

$a_3 = 5$

$a + 2d = 5$ .... (1)

$a_7 = 9$

$a + 6d = 9$ .... (2)

समी. (2) में से समी. (1) घटाने पर

$$\begin{array}{r} a + 6d = 9 \\ -a \pm 2d = -5 \\ \hline 4d = 4 \end{array}$$

$\Rightarrow d = 1$

d=1, समी. (1) में रखने पर

$a + 2 \times 1 = 5$

$a = 3$

अत: AP: 3, 4, 5, 6, ...

2. **3 अंको वाली कितनी सख्याएं 7 से विभाज्य है?**

हल:- 7 से विभाज्य 3 अंको वाली संख्याओं की AP: 105, 112, 119, ... 994

$a = 105, d = 112 - 105 = 7, a_n = 994$

सुत्र $a + (n-1)d = a_n$ से

$\Rightarrow 105 + (n-1)7 = 994$

$\Rightarrow (n-1)7 = 994 - 105$

$\Rightarrow n - 1 = 889/7$

$\Rightarrow n = 127 + 1$

$\Rightarrow n = 128$ अत: 3 अंको वाली 128 सख्याएं 7 से विभाज्य हैं।

3. **उस AP का 31 वां पद ज्ञात करों जिसका 11 वां पद 38 तथा 16 वां पद 73 है।**

हल:- माना AP का प्रथम पद 'a' तथा सार्वअंतर 'd' है।

दिया है- $a_{11} = 38$

$\Rightarrow a + (11-1)d = 38$

$\Rightarrow a + 10\,d = 38$ .... (1)

$a_{16} = 73$

$\Rightarrow a + 15\,d = 73$ .... (2)

समी. (2) में से समी. (1) घटाने पर

$$\begin{array}{r} a + 15d = 73 \\ -\;a \pm 10d = -38 \\ \hline 5d = 35 \end{array}$$

$\Rightarrow d = 7$

d=7,समी. (1) में रखने पर

$a + 10 \times 7 = 38$

$\Rightarrow a = 38 - 70$

$\Rightarrow a = -32$

अतः $a_{31} = a + 30\,d$

$= -32 + 30 \times 7$

$= -32 + 210$

$= 178$

4. किसी AP का प्रथम पद 5, अंतिम पद 45 तथा पदों का योग 400 है। पदों की संख्या और सार्व अंतर ज्ञात करो।

हलः- $a = 5$, $l = 45$, $S_n = 400$, $n = ?$, $d = ?$

सुत्र $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ से

$\Rightarrow 400 = \frac{n}{2}(5+45)$

$\Rightarrow 800 = 50n$

$\Rightarrow n = 800/50$

$\Rightarrow n = 16$

$a + (n-1)d = a_n$

$\Rightarrow 5 + (16-1)d = 45$

$\Rightarrow 15d = 45 - 5$

$\Rightarrow d = 40/15$

$\Rightarrow d = 8/3$

अतः पदों का योग (n) = 16 सार्व अंतर (d) = 8/3

5. जाँच कीजिए कि AP: 11, 8, 5, 2,...... का कोई पद – 150 है या नहीं ?

हलः- माना दी गई AP का n वाँ पद - 150 है

अतः $a + (n-1)d = a_n$ से

$\Rightarrow 11 + (n-1)(-3) = -150$

$\Rightarrow -3n + 3 = -150 - 11$

$\Rightarrow -3n = -161 - 3$

$\Rightarrow n = -164/-3$

$\Rightarrow n = 54\frac{2}{3}$

चूंकि n का मान धनात्मक पूर्णांक नहीं है अतः दी गई AP का कोई भी पद - 150 नहीं है।

6. एक AP का 17 वां पद इसके 10 वें पद से 7 अधिक है। इस AP का सार्वअंतर ज्ञात कीजिये।

हलः- माना AP का प्रथम पद 'a' तथा सार्वअंतर 'd' है।

प्रश्नानुसार

$a_{17} - a_{10} = 7$

$\Rightarrow [a + (17-1)d] - [a + (10-1)d] = 7$

$\Rightarrow a + 16\,d - a - 9d = 7$

$\Rightarrow 7\,d = 7$

$\Rightarrow d = 1$

अतः AP का सार्व अंतर = 1

7. निम्न योगफल ज्ञात कीजिए-

(i) प्रथम 1000 धनात्मक पूर्णाकों का

हलः- प्रथम n धनात्मक पूर्णाकों का योफल $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\Rightarrow S_{1000} = \frac{1000(1000+1)}{2}$

$\Rightarrow S_{1000} = \frac{1000 \times 1001}{2}$

$\Rightarrow S_{1000} = 500500$

8. 8 के प्रथम 15 गुणजों का योग ज्ञात कीजिए।

हलः- 8 के प्रथम 15 गुणजों से बनी AP: 8, 16, 24, ...

$a = 8$, $d = 8$, $n = 15$, $S_{15} = ?$

$\because S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}[2 \times 8 + (15-1)8]$

$= \frac{15}{2}(16 + 112)$

$= \frac{15}{2} \times 128$

$= 960$

अतः 8 के प्रथम 15 गुणजों का योगफल 960 होगा।

◈ दीर्घ उत्तरात्मक प्रश्न -

❖ 50 पदों वाली AP का तीसरा पद 12 तथा अंतिम पद 106 है। AP का 29 वां पद ज्ञात कीजिए।

❖ एक AP के चौथे व 8 वें पदों का योग 24, छठें व 10 वें पदों

का योग 44 है। AP के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए।

❖ एक AP के प्रथम 7 पदों का योग 49 तथा प्रथम 17 पदों का योग 289 है। AP के प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

❖ एक टी.वी सैट निर्माता तीसरे वर्ष में 600 टी.वी. तथा सातवें वर्ष 700 टी.वी. का उत्पादन करता है। यह मानते हुए कि प्रत्येक वर्ष उत्पादन में एक समान रूप से एक निश्चित संख्या में वृद्धि होती है। ज्ञात कीजिए-

(i) प्रथम वर्ष में उत्पादन

(ii) 10 वें वर्ष में उत्पादन

(iii) प्रथम 7 वर्षों में कुल उत्पादन।

❖❖❖

@SHEKHAWAT
IMISSION100

शेखावाटी मिशन 100 की कक्षा 10 एवं 12 के विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम QR CODE स्कैन करें।

अध्याय 6

त्रिभुज

बहुविकल्प प्रश्न-2, अंक (2), लघुत्तरात्मक प्रश्न -1, अंक (2), कुल अंक = 4

❖ **समरूप आकृतियाँ** -वे सभी आकृतियाँ जिनके आकार समान होते हैं परन्तु माप समान होना आवश्यक नहीं है।

❖ **समरूप बहुभुज**- समान भुजाओं वाले बहुभुज परस्पर समरूप कहलाते है यदि -(i) संगत कोण समान हो।

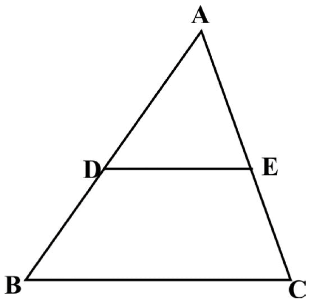
(ii) संगत भुजाएं समानुपाती हो।

❖ सभी वृत, वर्ग, समबाहु त्रिभुज, रेखाखण्ड परस्पर समरूप होते हैं।

❖ दो समान कोणिक त्रिभुजों में संगत भुजाओं का अनुपात भी सदैव समान रहता है।

❖ आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय (थेल्स प्रमेय)- किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर अन्य दो भुजाओं को प्रतिच्छेद करती हुई रेखा खींची जाए तो यह इन दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।

ΔABC में यदि $DE \parallel BC$



तो $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

साथ ही, $(i) \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ $(ii) \dfrac{DB}{AB} = \dfrac{EC}{AC}$

❖ **आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय का विलोम**-किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।

❖ त्रिभुजों की समरूपता हेतु कसौटियाँ-

(i) AAA (कोण - कोण - कोण) या AA (कोण - कोण)

(ii) SSS (भुजा - भुजा - भुजा)

(iii) SAS (भुजा - कोण - भुजा)

❖ सभी सर्वागसम आकृतियाँ समरूप होती है परन्तु सभी समरूप आकृतियों का सर्वागसम होना आवश्यक नहीं है।

◈ बहुविकल्प प्रश्न -

प्र. 1. दो बहुभुज समरूप होंगे यदि ?

(अ) संगत कोण समान हो (ब) संगत भुजाएं समानुपाती हों

(स) दोनों 'अ' तथा 'ब' (द) इनमें से कोई नहीं (स)

प्र. 2. निम्न में से त्रिभुजों के लिए समरूपता की कसौटी नहीं है?

(अ) AAA (ब) SSS

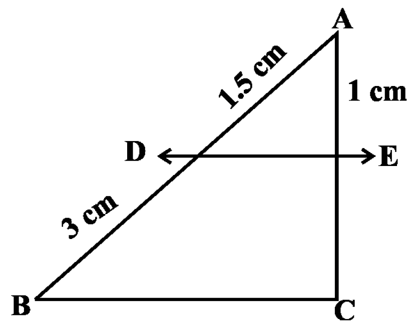
(स) SAS (द) ASA (द)

प्र. 3. किस प्रकार के त्रिभुज सदैव समरूप होते हैं-?

(अ) विषम बाहु त्रिभुज (ब) समबाहु त्रिभुज

(स) समद्विबाहु त्रिभुज (द) समकोण त्रिभुज (ब)

प्र. 4. सलंग्न आकृति में DE || BC हो तो EC की लम्बाई का माप होगा?



(अ) 2 cm (ब) 1 cm

(स) 4.5 cm (द) 1.5 cm (अ)

प्र. 5. Δ ABC ~ Δ PQR हो तो निम्न में से कौनसा कथन असत्य है-

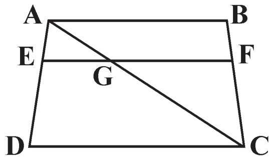
(अ) $\angle C = \angle R$ (ब) BC = QR

(स) AC = QR (द) $\angle B = \angle Q$ (स)

◈ लघुतरात्मक प्रश्नः-

प्र. 1. ABCD एक समलम्ब है जिसमें AB//DC है। असमांतर भुजाओं AD और BC पर क्रमशः बिन्दु E और F इस प्रकार स्थित हैं कि EF भुजा AB के समांतर हैं। दर्शाइये

कि $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$



हल:- AC को मिलाया जो EF को G पर काटती है।

AB || DC (दिया)

EF || AB (दिया है)

EF || DC

Δ ADC में EG || DC

$\frac{AE}{ED}=\frac{AG}{GC}$ (आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से) ... (1)

इसी प्रकार Δ CAB में

$\frac{BF}{FC}=\frac{AG}{GC}$ ... (2)

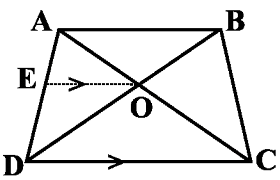
(1) व (2) से

$\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$ (इति सिद्धम)

प्र. 2. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO}=\frac{CO}{DO}$ है। दर्शाइए कि ABCD एक समलंब है।

हल:- दिया है-

$\frac{AO}{BO}=\frac{CO}{DO}$



$\Rightarrow \frac{AO}{CO}=\frac{BO}{DO}$...............(i)

$EO \parallel DC$ की रचना से

ΔADC में, $EO \parallel DC \Rightarrow \frac{AE}{DE}=\frac{AO}{CO}$

(थेल्स प्रमेय से) .... (2)

$\varepsilon q^n(1)$ व $\varepsilon q^n(2)$ से $\frac{BO}{DO}=\frac{AE}{DE}$

थेल्स प्रमेय के विलोम से, $EO \parallel AB$

अब चूँकि $EO \parallel DC$ (रचना से)

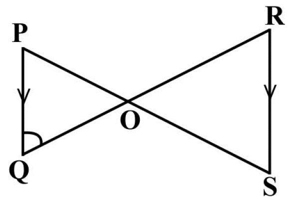
तथा $EO \parallel AB$ (सिद्ध किया है।)

अत: $AB \parallel DC$

$\Rightarrow ABCD$ एक समलंब है।

प्र. 3. सलंग्न आकृति में यदि PQ || RS तो सिद्ध किजिए कि -

$\Delta POQ \sim \Delta SOR$



हल:- दिया है कि PQ || RS

$\Rightarrow \angle PQO = \angle ORS$ (एकांतर कोण)

तथा $\angle POQ = \angle SOR$ (शिर्षाभिमुख कोण)

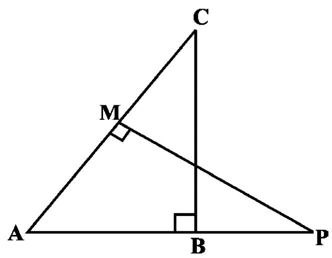
अत: AA समरूपता कसौटी से,

$\Delta POQ \sim \Delta SOR$ (इति सिद्धम)

प्र. 4. संलग्न आकृति में Δ ABC और Δ AMP दो समकोण त्रिभुज है जिनके कोण B और M समकोण हैं। सिद्ध कीजिए कि

(i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

(ii) $\frac{CA}{PA}=\frac{BC}{MP}$



हल:- (i) ΔABC व ΔAMP में

$\angle ABC = \angle AMP$ (प्रत्येक समकोण)

$\angle CAB = \angle MAP$ (उभयनिष्ठ)

AA (कोण - कोण) समरूपता कसौटी से,

$\Delta ABC \sim \Delta AMP$ इति सिद्धम

प्र. 5. लंबाई 6 मी.वाले एक उर्ध्वाधर स्तंभ की भूमि पर छाया की लंबाई 4 मी. है। जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लंबाई 28 मी. है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करो।

हल:- स्तंभ CD = 6m.

मीनार AB = ?

$\because \Delta EDC \sim \Delta EBA$ (AAसमरूपता से)

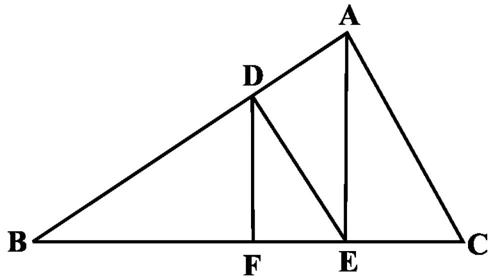
$\Rightarrow \frac{ED}{EB} = \frac{DC}{BA}$

$\Rightarrow \frac{4}{28} = \frac{6}{BA}$

$\Rightarrow AB = \frac{28 \times 6}{4}$

$\Rightarrow AB = 42$ मी. अत: मीनार की ऊँचाई = 42 मी.

प्र. 6. संलग्न आकृति में $DE \parallel AC$ और $DF \parallel AE$ है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ है।



हल:- दिया है- $DE \parallel AC$,$DF \parallel AE$

सिद्ध करना है-$\Rightarrow \frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$

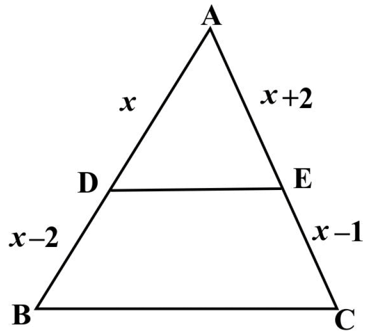
उपपत्ति -ΔBAC में, $DE \parallel AC$

$\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{BE}{EC}$ (थेल्स प्रमेय से)............ (1)

इसी प्रकार ΔBAE में,$DF \parallel AE \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{BF}{FE}$ ....(2)

समी. (1) व (2)से, $\frac{BE}{EC} = \frac{BF}{FE}$ इति सिद्धम्

प्र. 7. चित्र में $DE \parallel BC$, $AD = x, DB = x - 2, AE = x + 2$ तथा $EC = x - 1$ हो तो x का मान ज्ञात करो।



हल:- ΔABC में, $DE \parallel BC$

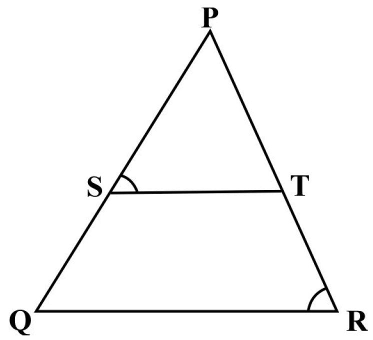
$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से)

$\Rightarrow \frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$

$\Rightarrow x^2 - x = x^2 - 4$

$\Rightarrow x = 4$

प्र. 8. संलग्न आकृति में $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ तथा $\angle PST = \angle PRQ$ है। सिद्ध करो कि ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



हल. दिया है - $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

$\Rightarrow ST \parallel QR$ (थेल्स प्रमेय के विलोम से)

$\Rightarrow \angle PST = \angle PQR$ (संगत कोण).......... (1)

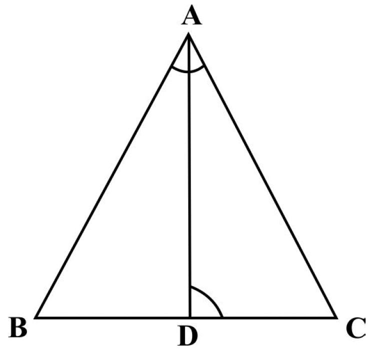
दिया है- $\angle PST = \angle PRQ$ ....(2)

समी. (1)व (2) से , $\angle PQR = \angle PRQ$

$\Rightarrow PQ = PR$ (समान कोणों की सम्मूख भुजा)

$\Rightarrow \Delta PQR$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है। इति सिद्धम्

प्र. 9. एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार है कि $\angle ADC = \angle BAC$ है। दर्शाइये कि CA^2 = CB.CD



हलः- दिया है- ΔABC में भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार है कि $\angle ADC = \angle BAC$

सिद्ध करना है- $CA^2 = CB.CD$

उपपति- ΔABC व ΔDAC में

$\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ कोण)

$\angle BAC = \angle ADC$ (दिया है)

$\because$ AA समरूपता कसौटी से,

$\Delta ABC \sim \Delta DAC$

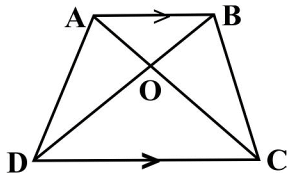
$\Rightarrow \frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CA}$

वज्र गुणन से,

$CA.CA = CB.CD$

$\Rightarrow CA^2 = CB.CD$ इति सिद्धम्

प्र. 10. समलंब चतुर्भुज ABCD जिसमें $AB \parallel DC$ है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए दर्शाइये कि $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$



हलः- दिया है- चतुर्भुज ABCD में $AB \parallel DC$

सिद्ध करना - $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

उपपति - $\because AB \parallel DC$ और AC तिर्यक रेखा है

$\Rightarrow \angle OAB = \angle OCD$ (एकांतर कोण)

$\angle AOB = \angle COD$ (शिर्षा भिमुख कोण)

AA समरूपता कसौटी से,

$\Delta AOB \sim \Delta COD$

$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ इति सिद्धम्

❖❖❖

अध्याय 7

निर्देशांक ज्यामिति

बहुविकल्प प्रश्न - 1, अंक (1), रिक्त स्थान प्रश्न प्रश्न - 1, अंक (1)
लघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (2), दीर्घउत्तरात्मक - 1 (3 अंक) , कुल अंक = 7

◈ बहुविकल्प प्रश्न -

1. मूल बिन्दु के निर्देशांक होते है?
(1) (1, 1) (2) (0, 0)
(3) (1, 0) (4) (2, 2) (2)

2. निर्देशांक (-1, 1) में भुज और कोटि का मान क्रमशः है?
(1) भुज=-1, कोटी = 1 (2) भुज=1, कोटि=-1
(3) भुजा=1, कोटी=0 (4) भुज=0, कोटि=-1 (1)

3. यदि बिन्दु (K, 2) तथा (3, 4) के बीच की दूरी $\sqrt{8}$ हो तो k का मान होगा?
(1) k = 5, 1 (2) k = -5, 1
(3) k = -1, -5 (4) k = -1, 5 (1)

4. बिन्दु (5,-2) की y - अक्ष से दुरी है?
(1) -2 (2) 5
(3) 0 (4) इनमें से कोई नहीं (2)

5. बिन्दु (-1, 1) कौनसे चतुर्थांश में स्थित है?
(1) प्रथम (2) द्वितीय
(3) तृतीय (4) चुतर्थ (2)

6. यदि बिन्दुओं (3, a) और (4, 1) के बीच की दूरी $\sqrt{10}$ हो तो a का मान होगा?
(1) 3, -1 (2) 2, -2
(3) 4, -2 (4) 5, -3 (3)

7. X- अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु की कोटि होती है?
(1) 1 (2) -1
(3) 0 (4) इनमेंसे कोई नहीं (3)

8. बिन्दु (-x, -y) की मूल बिन्दु से दूरी होगी?
(1) $-x$ (2) -y
(3) x^2+y^2 (4) $\sqrt{x^2+y^2}$ (4)

9. यदि बिन्दु Q (0,1), बिन्दुओं P(5, -4) और R (x, 6) का मध्य बिन्दु है तो x का मान कितना होगा?
(1) 5 (2) -5
(3) 4 (4) 6 (2)

10. यदि एक वृत का केन्द्र (3, 5) है तथा एक व्यास के अंत बिन्दु (4, 7) तथा (2, y) हैं तो y का मान कितना होगा?
(1) 2 (2) 3
(3) 5 (4) 0 (2)

11. यदि बिन्दुओं A(4, P) तथा B(1, 0) के बीच की दूरी 5 इकाई है तो P का मान है?
(1) केवल 4 (2) केवल -4
(3) ±4 (4) 0 (3)

12. X- अक्ष पर स्थित बिन्दु P जो बिन्दुओं A (-1, 0) तथा B(5, 0) से समदूरस्थ हैं, वह हैं?
(1) (O, 2) (2) (2, 2)
(3) (2, 0) (4) इनमें से कोई नहीं (3)

◈ रिक्तस्थान प्रश्न -

1. दो बिन्दूओं के बीच दूरी सूत्र .... है।

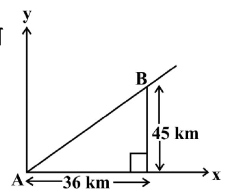
उ. $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

2. y - अक्ष पर स्थित किसी बिन्दू के निर्देशांक .... होते हैं।

उ. (0, y)

3. आकृतियों की ज्यामिति का अध्ययन करने के लिए .... का उपयोग किया जाता है।

उ. निर्देशांक ज्यामिति।

4. आकृति 

में A से B के बीच की दूरी ज्ञात करने के लिए .... का प्रयोग किया जाता है?

उ. पाइथागोरस प्रमेय।

5. विभाजन सूत्र .... है?

उ. $\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$

6. बिंदू (0, 0) और (36,15) के बीच की दूरी .... है?

उ. 39

7. निर्देशांक $\left(\frac{kx_2+x_1}{k+1},\frac{ky_2+y_1}{k+1}\right)$ में m_1 व m_2 के मान क्रमशः ...., ... हैं।

उ. K, 1

8. बिन्दू (2, 3) और (4, 6) को मिलाने वाले मध्य बिन्दू के निर्देशांक .... है।

उ. $\left(3,\frac{9}{2}\right)$

9. समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर .... होतें है।

उ. समद्विभाजित

10. x - अक्ष पर स्थित किसी बिन्दू के निर्देशांक .... होते हैं।

उ. (x, 0)

◈ लघुतरात्मक प्रश्न -

1. किसी वर्ग के सम्मुख शीर्ष (-5,-4) और (3, 2) है तो इसके विकर्ण की लंबाई लिखिए।

हल. वर्ग के विकर्ण की लंबाई

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(3+5)^2+(2+4)^2}$$
$$=\sqrt{8^2+6^2}$$
$$=\sqrt{64+36}$$
$$=10$$

2. बिन्दुओं A(-1, -2), B(1, 0), C(-1, 2) तथा D(-3, 0) से बनने वाले चतुर्भुज का प्रकार बताइये।

हल.

दूरी AB $=\sqrt{(1+1)^2+(0+2)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

दूरी BC $=\sqrt{(-1-1)^2+(2+0)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

दूरी CD $=\sqrt{(-3+1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

दूरी AD $=\sqrt{(-1+3)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

इसी प्रकार -

विकर्ण AC = विकर्ण BD

अत: चतुर्भुज ABCD एक वर्ग की आकृति है।

3. यदि Q(0, 1) बिन्दुओं P(5,-3) और R(*x*, 6) से समदूरस्थ हैं तो *x* के मान ज्ञात करों?

हल. ∵ बिन्दु Q, P तथा R से समदुरस्थ है

∴ दूरी PQ = दूरी QR

$\sqrt{(5-0)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{(0-x)^2+(1-6)^2}$

$\sqrt{25+16}=\sqrt{x^2+25}$

$41=x^2+25$

$\Rightarrow x^2=41-25$

$x=\sqrt{16}$

$x=\pm4$

4. Y- अक्ष पर एक ऐसा बिन्दु ज्ञात करों जो बिन्दुओं A(6,5) और B (-4, 3) से समपूरस्थ है?

हल. माना Y - अक्ष पर बिन्दू P (0,Y) है।

अत: दूरी PA = दूरी PB

$\sqrt{(6-0)^2+(5-y)^2}=\sqrt{(-4-0)^2+(3-y)^2}$

$\sqrt{36+25+y^2-10y}=\sqrt{16+9+y^2-6y}$

$61+y^2-10y=25+y^2-6y$

$-10y+6y=-61+25$

$-4y=-36$

$y=\frac{36}{4}=9$

अत: P (0, 9) बिन्दू हैं।

5. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करों जो बिन्दुओं (4, -3) और (8, 5) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को आंतरिक रूप से 3:1 के अनुपात में विभाजित करता है?

हल. माना वह बिन्दू P(*x*, y) है

विभाजन सूत्र से,

$$P(x,y)=\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2},\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$$

$$P(x,y)=\left(\frac{3\times8+1\times4}{3+1},\frac{3\times5+1\times-3}{3+1}\right)$$

$$P(x,y)=\left(\frac{24+4}{4},\frac{15-3}{4}\right)$$

$$P(x,y)=(7,3)$$

6. यदि बिन्दु A(6,1), B(8,2), C(9,4) और D (P,3) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हों तो P का मान ज्ञात कीजिए।

हल. समांतर चतु. के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते है

अत: विकर्ण AC के मध्य बिन्दु के निर्देशांक = विकर्ण BD के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{6+9}{2},\frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+P}{2},\frac{2+3}{2}\right)$$

$$\left(\frac{15}{2};\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+P}{2};\frac{5}{2}\right)$$

दोनों तरफ X- निर्देशांक की तुलना करने पर,

$$\frac{15}{2} = \frac{8+P}{2}$$

$$15 = 8+P$$

$$\Rightarrow P = 15-8 = 7$$

$$P = 7$$

7. Y का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु P (2,-3) तथा Q (10, y) के बीच की दूरी 10 मात्रक है।

हल. दूरी $PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$10=\sqrt{(10-2)^2+(y-(-3))^2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$10^2 = 8^2 + (y+3)^2$

$100 = 64 + y^2 + 9 + 6y$

$y^2+6y = 100-73$

$y^2+6y = 27$

$y^2 + 6y - 27 = 0$

$y(y+9) - 3(y+9) = 0$

$(y+9)(y-3) = 0$

या तो $y + 9 = 0$ या $y - 3 = 0$

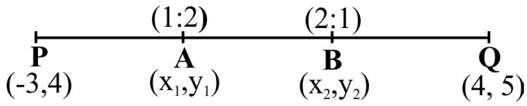
$y = -9$, $y = 3$

अत: $y = 3, -9$

◈ **दीर्घउत्तरात्मक प्रश्न -**

1. बिन्दुओं P(-3,4) और Q (4,5) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को समत्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल.



बिन्दू A के लिए $m_1=1, m_2=2$

$x_1=-3, x_2=4$

$y_1=4, y_2=5$

$$A(x_1,y_1)=\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2},\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$$

$$A(x_1,y_1)=\left(\frac{1\times4+2\times-3}{1+2},\frac{1\times5+2\times4}{1+2}\right)$$

$$A(x_1,y_1)=\left(\frac{4-6}{3},\frac{5+8}{3}\right)$$

$$A(x_1,y_1)=\left(\frac{-2}{3},\frac{13}{3}\right)$$

$$A(x_1,y_1)=\left(\frac{-2}{3},\frac{13}{3}\right)$$

बिन्दू B के लिए $m_1=2, m_2=1$

$x_1=-3, x_2=4$

$y_1=4, y_2=5$

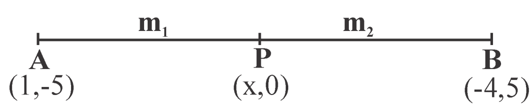
$$B(x_2,y_2)=\left(\frac{2\times4+1\times-3}{2+1},\frac{2\times5+1\times4}{2+1}\right)$$

$$B(x_2,y_2)=\left(\frac{8-3}{3},\frac{10+4}{3}\right)$$

$$B(x_2,y_2)=\left(\frac{5}{3},\frac{14}{3}\right)$$

2. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं A(1,-5) और B (-4,5) को मिलाने वाला रेखाखण्ड X- अक्ष से विभाजित होता है तथा इस विभाजन बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल. माना x - अक्ष पर अभीष्ट बिन्दू P(x,0) है।



बिन्दू P के निर्देशांक

$$= \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

$$(x, 0) = \left(\frac{m_1 \times -4 + m_2 \times 1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 \times 5 + m_2 \times -5}{m_1 + m_2} \right)$$

$$(x, 0) = \left(\frac{-4m_1 + m_2}{m_1 + m_2}, \frac{5m_1 - 5m_2}{m_1 + m_2} \right)$$

दोनों तरफ Y- निर्देशांक की तुलना करने पर,

$$\frac{5m_1 - 5m_2}{m_1 + m_2} \times \frac{0}{1}$$

$5m_1 - 5m_2 = 0$

$5(m_1 - m_2) = 0$

$m_1 - m_2 = 0$

$m_1 = m_2$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{1}$$

अत: $m_1 : m_2 = 1:1$

अत: पुन: X- निर्देशांक की तुलना करने पर

$$x = \frac{-4m_1 + m_2}{m_1 + m_2}$$

$$x = \frac{-4 + 1}{1 + 1} \left(m_1 \text{ व } m_2 \text{ के मान रखने पर} \right)$$

$$x = \frac{-3}{2}$$

∴ विभाजन बिन्दू के निर्देशांक

$P(x, 0)$

$P\left(\frac{-3}{2}, 0 \right)$ हैं।

❖❖❖

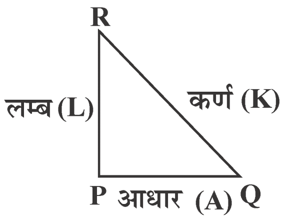
अध्याय 8

त्रिकोणमिति का परिचय

बहुविकल्प प्रश्न - 1, अंक (1), रिक्त स्थान प्रश्न प्रश्न - 1, अंक (1)
लघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (2), निबंधात्मक - 1 (4 अंक) , कुल अंक = 8

❖ **त्रिकोण मितीय अनुपातः- समकोण त्रिभुज की भुजाओं के अनुपातों का उसके न्यूनकोणों के सापेक्ष अध्ययन को त्रिकोण मितीय अनुपात कहते है।**

$\frac{LAL}{KKA}$



$\sin\theta = \frac{L}{K}$ $\quad \cot\theta = \frac{A}{L}$

$\cos\theta = \frac{A}{K}$ $\quad \sec\theta = \frac{K}{A}$

$\tan\theta = \frac{L}{A}$ $\quad \text{cosec}\theta = \frac{K}{L}$

❖ **व्युत्क्रम त्रिकोणमितीय अनुपात -**

$$\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \Rightarrow \sin\theta.\text{cosec}\theta = 1$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta.\sec\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \Rightarrow \tan\theta.\cot\theta = 1$$

❖ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$$\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

❖ **विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों की सारणीः-**

डिग्री / रेडियस — त्रिकोणमिति अनुपात	0^0 / 0	30^0 / $\frac{\pi}{6}$	45^0 / $\frac{\pi}{4}$	60^0 / $\frac{\pi}{3}$	90^0 / $\frac{\pi}{2}$
sinθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tanθ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞ (अपरिभाषित)
cotθ	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
secθ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
cotθ	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

❖ **त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएे:-**

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta, \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\Rightarrow \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta, \Rightarrow \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

$\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\Rightarrow \text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta, \Rightarrow \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1$

◈ **बहुविकल्प प्रश्न -**

1. $\tan 45^0 + \cot 45^0$ का मान होगा-

(1) 1 (2) 2

(3) 3 (4) 0 (2)

हल. $\tan 45^0 + \cot 45^0$

$= 1 + 1 = 2$

2. $2\sin 45^0 . \cos 45^0$ का मान ज्ञात करो:-

(1) 1 (2) 2

(3) 3 (4) 0 (1)

हल. $2\sin 45^0 . \cos 45^0$

$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{2} = 1$

3. $\tan^2 60$ का मान है:-

(1) $\sqrt{3}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(3) 3 (4) $\frac{1}{3}$ (3)

हल. $\tan^2 60^0 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3 \{\because \tan 60^0 = \sqrt{3}\}$

4. $\sin^2 50^0 + \cos^2 50^0 + 1$ बराबर है:-

(1) 2 (2) 1

(3) $\frac{1}{2}$ (4) 0 (1)

हल. $\sin^2 50^0 + \cos^2 50^0 + 1$

$= 1 + 1 = 2 \{\because \sin^2\theta + \cos^2\theta\}$

5. $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$ बराबर है:-

(1) 1 (2) 8

(3) 9 (4) 0 (3)

हल. $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$

$= 9\left[\sec^2 A - \tan^2 A\right] = 9 \times 1 = 9 \{1 + \tan^2 A = \sec^2 A\}$

7. यदि $\sin A = \frac{1}{2}$ और $\cos B = \frac{1}{2}$,तब (A + B) का मान है:-

(1) 30^0 (2) 0^0

(3) 60^0 (4) 90^0 (4)

हल. $\sin A = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin A = \sin 30^0$

$\Rightarrow A = 30^0$

$\cos B = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos B = \cos 60^0$

$\Rightarrow B = 60^0$

$A + B = 30^0 + 60^0 = 90^0$

9. $\frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ का $\theta = 45^0$ मान है:-

(1) 0 (2) 1

(3) 2 (4) -1 (2)

हल. $\theta = 45^0$ रखने पर :-

$= \frac{1 - \cos 2 \times 45^0}{\sin 2 \times 45^0} = \frac{1 - \cos 90^0}{\sin 90^0} = \frac{1 - 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$

◈ **रिक्त स्थान प्रश्न -**

1. यदि $\sin\theta = \cos\theta$ तो $\theta =$ ....

हल. $\sin\theta = \cos\theta$

$\Rightarrow \tan\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan 45^0 \Rightarrow \theta = 45^0$

2. $\frac{1 - \tan^2 45^0}{1 + \tan^2 45^0} =$ ....

हल. $= \frac{1 - (1)^2}{1 + (1)^2} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$ $\because \tan 45^0 = 1$

3. $\left(1 + \tan^2\theta\right)(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta)$ का मान .... है।

हल. $= \sec^2\theta(1-\sin^2\theta)$

$= \sec^2\theta \times \cos^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \times \cos^2\theta = 1$

4. यदि $\tan\theta = \sqrt{3}$ हो, तो θ का मान......... होगा-

हल. $\Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan 60^0$

$\Rightarrow \theta = 60^0$

5. यदि $\tan A = 1$ है तो $\sec A =$ .... होगा:-

हल. $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

$\Rightarrow \sec^2 A = 1 + (1)^2$

$\Rightarrow \sec^2 A = 1 + 1 = 2$

$\Rightarrow \sec A = \sqrt{2}$

◈ लघुतरात्मक प्रश्नः-

1. $\sin^2 60^0 + \cos^2 30^0$ का मान है:-

हल. $\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{3+3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

2. $\frac{2\tan 30^0}{1 + \tan^2 30^0}$

हल. $= \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \qquad \because \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. त्रिकोणमितीय अनुपात tanA को secA के पदों में लिखिए:-

हल. $\because \sec^2 A - \tan^2 A = 1$

$\Rightarrow \sec^2 A - 1 = \tan^2 A$

$\Rightarrow \tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

4. $\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta - 1}}$ का मान लिखिए :-

हल. $= \frac{1}{\sqrt{\cot^2\theta}} = \frac{1}{\cot\theta} = \tan\theta \quad \{\because \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$

5. यदि $\tan(A+B) = \sqrt{3}$ और $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$00 < A + B \le 90^0, A > B$ तो A व B का मान ज्ञात कीजिए-

हल. $\because \tan(A+B) = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan(A+B) = \tan 60^0$

$\Rightarrow A + B = 60^0$........................(*i*)

तथा $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan(A-B) = \tan 30^0$

$A - B = 30^0$

समी. (i) व (ii) को जोड़ने पर :-

$A + B = 60^0$

$A - B = 30^0$

$2A = 90^0$

$A = \frac{90^0}{2} = 45^0$ समी. (i) में रखने पर :-

$45^0 + B = 60^0$

$B = 60^0 - 45^0 = 15^0$

6. $\frac{5\cos^2 60^0 + 4\sec^2 30^0 - \tan^2 45^0}{\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0}$ का मान है:-

हल. $\frac{5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - (1)^2}{1}$

$= 5\times\frac{1}{4}+4\times\frac{4}{3}-1$

$= \frac{5}{4}+\frac{16}{3}-\frac{1}{1}$

$= \frac{15+64-12}{12} = \frac{67}{12}$

6. **ΔABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए-**

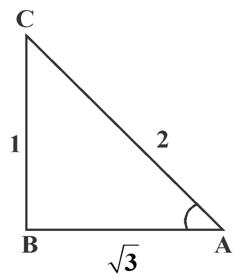
sinAcosC+cosAsinC

हल. $\because \tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{L}{A}$

$\Rightarrow L = 1, A = \sqrt{3}, K = ?$

पाइथागोरस प्रमेय से :-

कर्ण^2 = आधार^2+लम्ब^2



कर्ण^2 $= (\sqrt{3})^2 + (1)^2$

$\Rightarrow$ कर्ण^2 = 3 + 1

$\Rightarrow$ कर्ण^2 = 4

$\Rightarrow$ कर्ण = 2

सर्वप्रथम $\angle$A के लिए :- $A = \sqrt{3}, L = 1, K = 2$

$\sin A = \frac{L}{K} = \frac{1}{2}, \cos A = \frac{A}{K} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

तथा $\angle$C के लिए :- $A = 1, L = \sqrt{3}, K = 2$

$\cos C = \frac{A}{K} = \frac{1}{2}, \sin C = \frac{L}{K} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \sin A\cos C + \cos A\sin C$

$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

7. **Δ OPQ जिसका कोण P समकोण है, OP=7cm और OQ-PQ=1cm, sinQ और cosQ के मान ज्ञात कीजिए-**

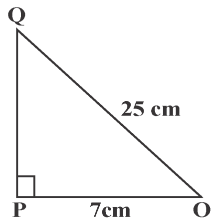
हल. Δ OPQ में

$\because$ OQ - PQ = 1

$\Rightarrow$ OQ = 1+PQ

पाइथागोरस प्रमेय से :-

कर्ण^2= आधार^2+लम्ब^2



$\Rightarrow OQ^2=OP^2+PQ^2$

$\Rightarrow (1+PQ)^2=7^2+PQ^2$

$\Rightarrow 1+PQ^2+2PQ=49+PQ^2$

$\Rightarrow 2PQ=48 = PQ=\frac{48}{2} = 24$

$\because OQ = 1 + PQ$

$\Rightarrow OQ = 1 + 24 = 25$

$\angle$Q के लिए :- A=24, L=7, K=25

$\sin Q = \frac{L}{K} = \frac{7}{25}$

$\cos Q = \frac{A}{K} = \frac{24}{25}$

8. **यदि 3cotA = 4, तो $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ का मान लिखिए:-**

हल. 3cotA=4

$\cot A=\frac{4}{3}=\frac{A}{L}$

यहाँ A=4, L=3, K=?

पाइथागोरस प्रमेय से:-

कर्ण^2 = आधार^2+लम्ब^2

$\Rightarrow$ कर्ण^2 = 4^2+3^2

$\Rightarrow$ कर्ण^2 = 16 + 9

$\Rightarrow$ कर्ण^2 = 25

$\Rightarrow$ कर्ण = 5

$$= \frac{1-\tan^2A}{1+\tan^2A} = \frac{1-\left(\frac{L}{A}\right)^2}{1+\left(\frac{L}{A}\right)^2}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{16-9}{16+9} = \frac{7}{25}$$

◈ निबंधात्मक प्रश्न –

1. **सिद्ध कीजिए-**
$(\sin A+\text{cosec}A)^2+(\cos A+\sec A)^2=7+\tan^2A+\cos^2A$

हल. L.H.S. $= (\sin A + \text{cosec}A)^2 + (\text{cas}A + \sec)^2$

$= \sin^2A+\text{cosec}^2A + 2\sin A.\text{cosec}A+\cos^2A+\sec^2A+2\cos A.\sec$

$$= \sin^2A+\cos^2A+2.\sin A\frac{1}{\sin A}$$

$$+2.\cos A.\frac{1}{\cos A}+\text{cosec}^2A+\sec^2A$$

$= 1+2+2+\text{cosec}^2A+\sec^2A$

$= 5 + \text{cosec}^2A+\sec^2A$

$= 5 + 1 + \cot^2A + 1 + \tan^2A$

$\{\because \text{cose}^2A=1+\cot^2A,\ \sec^2A=1+\tan^2A$

$= 7 + \tan^2A+\cot^2A$

= R.H.S. इति सिद्धम

2. **सिद्ध कीजिए:-** $\mathbf{\frac{\cos A}{1+\sin A}+\frac{1+\sin A}{\cos A}=2\sec A}$

हल. L.H.S. $= \frac{\cos A}{(1+\sin A)}+\frac{(1+\sin A)}{\cos A}$

$$= \frac{\cos^2A+(1+\sin A)^2}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{\cos^2A+1+\sin^2A+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{1+1+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{2+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{2(1+\sin A)}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{2}{\cos A} = \frac{2.1}{\cos A} = 2.\sec A$$

= R.H.S. इति सिद्धम

3. **सिद्ध कीजिए –** $\mathbf{\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A+\tan A}$

हल. L.H.S. $= \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}$

हर का परिमेयकरण करने पर:-

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)}{(1-\sin A)}\times\frac{(1+\sin A)}{(1+\sin A)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2A}} \quad \because (a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2A}}$$

$$= \frac{(1+\sin A)}{\cos A}$$

$$= \frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}$$

= SecA + tanA

= R.H.S. इति सिद्धम

अध्याय **9**

त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग

बहुविकल्प प्रश्न - 3, अंक (3), लघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (2), कुल अंक = 5

◈ बहुविकल्प प्रश्न -

1. उन्नयन कोण बनता है:-

(1) दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा के नीचे, क्षैतिज स्तर से नीचे

(2) दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा के बीच, क्षैतिज स्तर से ऊपर

(3) दोनों ही स्थितियों में

(4) इनमें से कोई नहीं (2)

2. 20 मी. लम्बी एक रस्सी एक उर्ध्वाधर खम्भें के शिखर तक पहुँचती है। यदि यह रस्सी खम्भे के साथ 30^0 का कोण बनाती है। तो खम्भे की ऊ. है:-

(1) 10 मी. (2) $10\sqrt{3}$ मी.

(3) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ मी. (4) 40 मी. (2)

3. एक $\sqrt{3}h$ मी. ऊँची दीवार की छाया h मी. लम्बी है तो सूर्य का उन्नतांश कोण ज्ञात कीजिए?

(1) 15^0 (2) 45^0

(3) 30^0 (4) 60^0 (4)

4. एक 100 मी. ऊँची मीनार का शिखर भूमि के किसी बिन्दू से 45^0 का कोण बनाता है। मीनार के पाद बिन्दु से बिन्दु की दूरी ज्ञात कीजिए?

(1) 200 मी. (2) 100 मी.

(3) 50 मी. (4) $100\sqrt{2}$ मी. (2)

5. एक नदी के ऊपर एक पुल नदी के तट के साथ 45^0 का कोण बनाता है। यदि नदी के ऊपर पुल की लम्बाई 100 मीटर हो तो नदी की चौड़ाई होगी: -

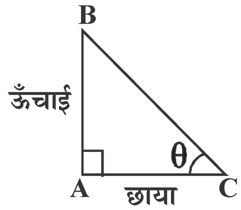
(a) 150 मीटर (b) $75\sqrt{2}$ मीटर

(c) $50\sqrt{2}$ मीटर (d) $100\sqrt{2}$ मीटर (3)

◈ लघुत्तरात्मक प्रश्न -

1. किसी मीनार की छाया उसकी ऊँचाई के बराबर हो तो सूर्य का उन्नयन कोण है:-

हल. दिया गया हैं:-



AB=AC

$\tan\theta = \frac{L}{A} = \frac{AB}{AC}$

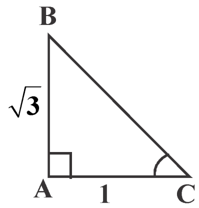
$\Rightarrow \tan\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan 45^0$

$\Rightarrow \theta = 45^0$

2. यदि किसी वृक्ष की छाया उसकी ऊँचाई की $\frac{1}{\sqrt{3}}$ गुना हो, तो सूर्य का उन्नयन कोण है:-

हल. $\tan\theta = \frac{L}{A}$



$= \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1}$

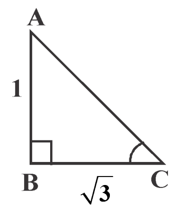
$= \tan\theta = \tan 60^0$

$= \theta = 60^0$

3. एक ऊर्ध्वाधर छड़ की लम्बाई तथा इसकी छाया की लम्बाई का अनुपात 1: $\sqrt{3}$ है, तो सूर्य का उन्नयन कोण है:-

हल. $\tan\theta = \frac{L}{A}$

$= \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$



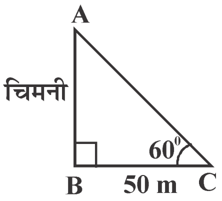
$\Rightarrow \tan\theta = \tan 30^0$

$\Rightarrow \theta = 30^0$

4. सूर्य के उन्नयन कोण में वृद्धि (0^0 से 90^0 तक) होने से किसी स्तम्भ की परछाई की लम्बाई में क्या परिवर्तन होता है?

हल. परछाई की लम्बाई कम होती जाएगी।

5. एक चिमनी के आधार से 50 मीटर दूरी पर से उसके शिखर का उन्नयन कोण 60^0 है तो चिमनी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए-



हल. माना चिमनी की ऊँ. = h m

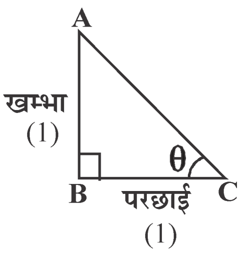
$$\tan 60^0 = \frac{h}{50}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{50}$$

$$\Rightarrow h = 50\sqrt{3}$$

अत: चिमनी की ऊँ.= $50\sqrt{3}$ m

6. किसी समय एक खम्भे की ऊँचाई व परछाई की लम्बाई समान है तो सूर्य का उन्नयन कोण लिखिए:-



हल. माना सूर्य का उन्नवंश कोण= θ

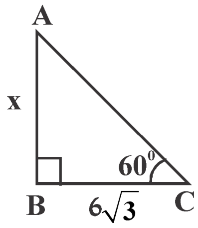
$$\tan\theta = \frac{L}{A} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = 1$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \tan 45^0$$

$$\Rightarrow \theta = 45^0$$

7. चित्र के अनुसार x का मान लिखिए:-



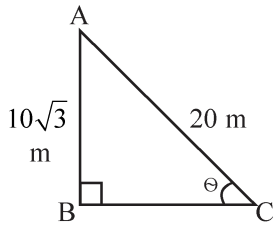
हल. $\Rightarrow \tan 60^0 = \frac{L}{A}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x = 6\sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = 18$$

8. दी गई आकृति में कोण θ का मान ज्ञात कीजिए:-



हल. $\sin\theta = \frac{L}{K}$

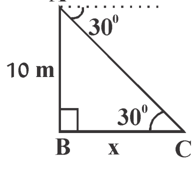
$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{10\sqrt{3}}{20}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \sin 60^0$$

$$\Rightarrow \theta = 60^0$$

9. 10m ऊँची एक मिनार के शिखर से पृथ्वी पर एक बिन्दू का अवनमन कोण 30^0 है। बिन्दू की मीनार के आधार से दूरी ज्ञात कीजिए।

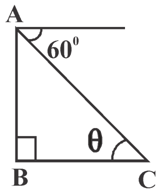


हल. माना मीनार के आधार

से बिन्दू की दुरी = x m

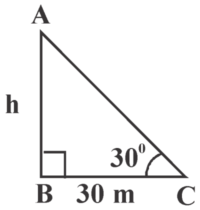
$$\Rightarrow \tan 30^0 = \frac{L}{A}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{x}$$
$$\Rightarrow x = 10\sqrt{3}m$$

10. निम्न चित्र में उन्नयन कोण θ ज्ञात कीजिए:-



हल. $\theta = 60^0$

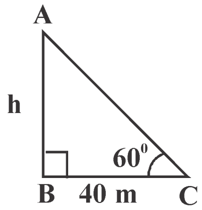
11. भूमि के एक बिन्दु से, जो मीनार के पाद-बिन्दु से 30 मी. की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयंन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए-



हल. माना मीनार की ऊँ. = h मीटर

$$\therefore \tan 30^0 = \frac{L}{A}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30}$$
$$\Rightarrow \sqrt{3}h = 30$$
$$\Rightarrow h = \frac{30}{\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow h = \frac{30 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}m$$

12. एक स्तम्भ के आधार से 40 मीटर दूर स्थित बिन्दू से स्तम्भ के ऊपरी सिरे का उन्नयन कोण 60° है। स्तम्भ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

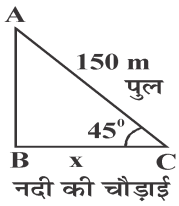


हल. माना स्तम्भ की ऊँ. = h m

$$\therefore \tan 60^0 = \frac{h}{40}$$
$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{40}$$
$$\Rightarrow h = 40\sqrt{3}m$$

अत: स्तम्भ की ऊँ. $= 40\sqrt{3}m$

13. एक नदी के ऊपर पुल नदी के किनारे के साथ 45° का कोण बनाता है, यदि नदी के ऊपर पुल की लम्बाई 150 मीटर हो तब नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए:-



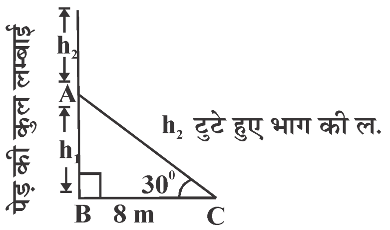
हल. माना नदी की चौड़ाई = x m

$$\therefore \cos 45^0 = \frac{A}{K}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{150}$$
$$\Rightarrow x = \frac{150 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$
$$x = \frac{150\sqrt{2}}{2} = 75\sqrt{2}$$

अत: नदी की चौड़ाई $= 75\sqrt{2}m$

14. आँधी आने से एक पेड़ टूट जाता है और टूटा हुआ भाग इस तरह मुड़ जाता है कि पेड़ का शिखर जमीन को छुने

लगता है और इसके साथ 30° का कोण बनाता है। पेड़ के पाद बिन्दु की दूरी, जहाँ पेड़ का शिखर जमीन को छुता है, 8m है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल. माना पेड़ की कुल ल. = (h_1+h_2)m

ΔABC में:-

$$\tan 30^0 = \frac{L}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h_1}{8}$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{8}{\sqrt{3}} ....(i)$$

पुनः $\cos 30^0 = \frac{A}{K}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{h_2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \times h_2 = 16 \quad \Rightarrow h_2 = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

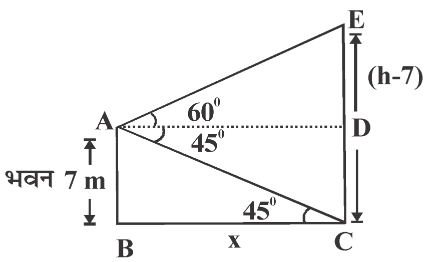
अतः पेड़ की कुल ऊँ. $= \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{8+16}{\sqrt{3}} = \frac{24 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{24\sqrt{3}}{3}$$

$$= 8\sqrt{3}\text{m.}$$

15. **7m ऊँचे भवन के शिखर से एक केबल टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और इसके पाद का अवनमन कोण 45° है। टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।**



हल. माना टावर की ऊँचाई = h m.

ΔABC में :-

$$\tan 45^0 = \frac{L}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{7}{x}$$

$$\Rightarrow x = 7.............(i)$$

पुनः ΔADE में:-

$$\tan 60^0 = \frac{L}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{(h-7)}{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x = h - 7.............(ii)$$

समी. (i) व (ii) से :-

$$\Rightarrow 7\sqrt{3} = h - 7$$

$$\Rightarrow h = 7\sqrt{3} + 7$$

$$\Rightarrow h = 7(\sqrt{3}+1)\text{m}$$

◈ अन्य महत्वपूर्ण प्रश्नः-

1. **एक 80 मी. चौड़ी सड़क के दोनों ओर आमने-सामने समान लम्बाई वाले दो खम्भे लगे हुए है। इन दोनों खम्भो के बीच सड़क के एक बिन्दु से खम्भों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 30° है। खम्भों की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।**
2. **एक समतल जमीन पर खड़ी मीनार की छाया उस स्थिति में 40 मी. अधिक लम्बी हो जाती है जबकि सूर्य का उन्नतांश कोण 60° से घटकर 30° हो जाता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करो।**
3. **सुमद्र तल से 75 मीटर ऊँची लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनयन कोण 45° और 60° है। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो, तो दो जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।**

अध्याय 10

वृत

बहुविकल्प प्रश्न - 1, अंक (1), लघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (2)
दीर्घउत्तरात्मक - 1 (3 अंक) , कुल अंक = 6

◈ बहुविकल्प प्रश्न -

1. एक वृत्त पर स्थित बिन्दु से कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं?

(1) 1 (2) 0
(3) 2 (4) अनन्त (1)

2. एक वृत्त के बाहर स्थित बिंदु से कितनी स्पर्श रेखाऐं खींची जा सकती है?

(1) 1 (2) 2
(3) अनन्त (4) 0 (2)

3. एक वृत्त पर कुल कितनी स्पर्श रेखाऐं खींची जा सकती है?

(1) 1 (2) अनन्त
(3) 2 (4) 0 (2)

4. वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को कहते है?

(1) स्पर्श बिन्दु (2) केन्द्र बिन्दु
(3) त्रिज्या (4) जीवा (1)

5. 5 सेमी. त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा से बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि OQ=12 सेमी. तो PQ की लम्बाई होगी?

(1) 12 सेमी. (2) 113 सेमी.
(3) $\sqrt{119}$ सेमी. (4) 8.5 सेमी. (3)

6. एक बिन्दु P से वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 24 सेमी. तथा बिन्दु P की केन्द्र से दूरी 25 सेमी है तो वृत्त की त्रिज्या होगी?

(1) 7 सेमी. (2) 15 सेमी.
(3) 12 सेमी. (4) 24.5 सेमी. (1)

7. किसी वृत्त के व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाऐं परस्पर होती है?

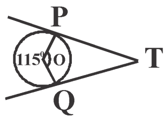
(1) लंबवत (2) समान्तर
(3) प्रतिच्छेदी (4) इनमे से कोई नहीं (2)

8. तीन संरेखीय बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्तों की संख्या है?

(1) 1 (2) 2
(3) 0 (4) अनन्त (3)

9. किसी वृत्त की त्रिज्या और उस पर खीचीं गई स्पर्श रेखा के मध्य कितने डिग्री का कोण होता है?

(1) 180^0 (2) 0^0
(3) 90^0 (4) 360^0 (3)

10. 

आकृति में TP, TQ केन्द्र O वाले वृत्त पर स्पर्श रेखाऐं इस प्रकार है कि $\angle POQ=115^0$ तो $\angle PTQ$ बराबर है?

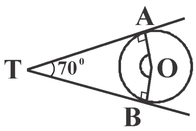
(1) 115^0 (2) 55^0
(3) 45^0 (4) 65^0 (4)

11. यदि एक बिन्दु P से O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर PA, PB स्पर्श रेखाऐं परस्पर 80^0 के कोण पर झुकी हो तो $\angle AOB$ का मान कितना होगा?

(1) 80^0 (2) 180^0
(3) 100^0 (4) 90^0 (3)

◈ लघुतरात्मक प्रश्न -

1. यदि एक बिन्दु T से O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर TA व TB स्पर्श रेखाएँ परस्पर 70^0 के कोण पर छुकी होतो $\angle AOB$ ज्ञात कीजिए।

हल. 

चित्रानुसार, O केन्द्र वाले वृत पर TA व TB परस्पर स्पर्श रेखाऐं हैं, तथा $\angle TAO=TBO=90^0$ (स्पर्श रेखा पर त्रिज्या लंबवत होती है।)

$\angle ATB = 70^0$

$\therefore \angle TAO + \angle TBO + \angle ATB + \angle AOB = 360^0$

$90^0 + 90^0 + 70^0 + AOB = 360^0$

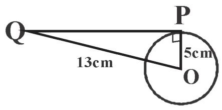
$250^0 + AOB = 360^0$

$AOB = 360^0 - 250^0$

$AOB = 110^0$

2. 5 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा के बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि OQ=13 सेमी, तो PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए

हल.



OQ = 13cm

तथा त्रिज्या OP = 5cm

तथा $\angle OPQ = 90^0$ (स्पर्श रेखा पर त्रिज्या लेम्बवत)

अतः समकोण त्रिभुज OPQ में,

पाइथागोरस प्रमेय से,

$OQ^2 = PQ^2 + OP^2$

$13^2 = PQ^2 + 5^2$

$169 = PQ^2 + 25$

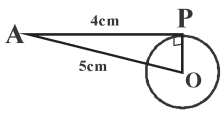
$PQ^2 = 169 - 25$

$PQ = \sqrt{144}$

PQ = 12cm

3. एक बिन्दु A से, जो एक वृत्त के केन्द्र से 5 सेमी दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 4 सेमी है तो वृत की त्रिज्या ज्ञात करो।

हल.



चित्रानुसार, OA = 5 cm

तथा स्पर्श रेखा AP = 4 cm

तथा $APO = 90^0$ (स्पर्श रेखा पर त्रिज्या लंबवत)

अतः समकोण त्रिभुज AOP में,

पाइथागोरस प्रमेय से,

$OA^2 = AP^2 + OP^2$

$5^2 = 4^2 + OP^2$

$25 = 16 + OP^2$

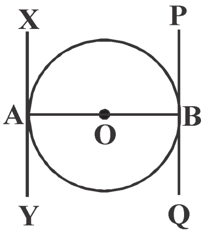
$\Rightarrow OP^2 = 25 - 16$

$OP = \sqrt{9}$

OP = 3 cm

अतः त्रिज्या OP = 3cm अ

4. सिद्ध करों कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाऐं समांतर होती हैं?



दिया है:-

∵ एक वृत्त जिसका केन्द्र O है तथा व्यास AB है। तथा XY, PQ स्पर्श रेखाऐं हैं।

सिद्ध करना है:- $XY \| PQ$

हल. ∵ OA त्रिज्या तथा XY स्पर्श रेखाऐं है

$\angle OAX = 90^0$ (∵ त्रिज्या, स्पर्श रेखा पर लंबवत होती)

तथा इसी प्रकार,

OB त्रिज्या तथा PQ स्पर्श रेखा है

$\therefore \angle OBQ = 90^0$

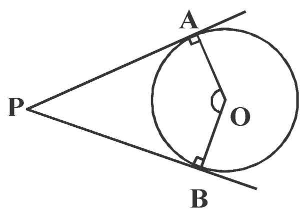
$\therefore \angle OAX = \angle OBQ = 90^0$

परंतु यहां समान्तर रेखा के एकांतर कोण है।

जब एक तिर्यक रेखा उन्हें काटती है।

अतः $XY \| PQ$

5. चित्र में O वृत्त का केन्द्र है तथा PA व PB स्पर्श रेखाऐं हैं तो सिद्ध करो कि AOBP एक चक्रीय चतुर्भुज है?



दिया है :- O वृत का केन्द्र है तथा AP, PB स्पर्श रेखा हैं।

सिद्ध करना है:- AOBP एक चक्रीय चतुर्भुज है।

हल. ∵ PA, PB स्पर्श रेखा एवं OA, OB वृत की त्रिज्या है।

$\therefore \angle OAP = 90^0$ तथा $OBP = 90^0$

$\because \angle OAP + \angle OBP + \angle AOB + \angle APB = 360^0$ (चतुर्भुज के चारों कोणों का योग)

$90^0 + 90^0 + \angle AOB + \angle APB = 360^0$

$\angle AOB + \angle APB = 360^0 - 180^0$

$\angle AOB + \angle APB = 180^0$

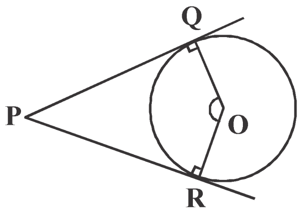
यहाँ सम्मुख कोणों का योग संपूरक है।

अतः चतुर्भुज AOBP एक चक्रीय चतुर्भुज है।

◈ दीर्घउत्तरात्मक प्रश्नः-

1. सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत पर खींचीं गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड द्वारा केन्द्र पर अंतरिक कोण का संपूरक होता है?

हल.



दिया है:- एक वृत जिसका केन्द्र O है तथा PQ तथा PR वृत पर स्पर्श रेखाऐं हैं।

सिद्ध करना है:- $\angle ROQ + \angle QPR = 180$

उपपति :- वृत में OQ त्रिज्या है तथा PQ स्पर्श रेखा है

$\therefore \angle OQP = 90^0$ (स्पर्श रेखा त्रिज्या पर लम्बवत होती है।)

इसी प्रकार

$\angle ORP = 90^0$

चतुर्भुज PQOR में,

$\angle RPQ + \angle QOR + \angle OQP + \angle ORP = 360^0$

$\angle RPQ + \angle QOR + 90^0 + 90^0 = 360^0$

$\angle RPQ + \angle QOR + 180^0 = 360^0$

$\angle RPQ + \angle QOR = 360^0 - 180^0$

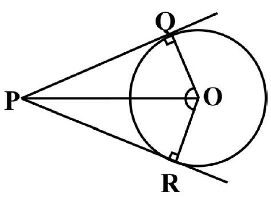
$\angle RPQ + \angle QOR = 180^0$

$\angle ROQ + \angle QPR = 180^0$

अतः $\angle ROQ + \angle QPR = 180^0$

2. सिद्ध कीजिए कि बाह्य बिन्दु से वृत पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाईयां बराबर होती है?

हल.



दिया है:- एक वृत्त जिसका केन्द्र O है तथा PQ तथा PR वृत्त पर स्पर्श रेखाऐं हैं।

सिद्ध करना है :- PQ = PR

रचना:- OP, OQ, OR को मिलाया

उपपति (हल):-

$\because$ स्पर्श रेखा, वृत्त की त्रिज्या पर लंबवत होती है।

$\therefore \angle OQP = \angle ORP = 90^0$

अब ΔPQO व ΔPRO में

$\angle OQP = \angle ORP$ (प्रत्येक 90^0)

OP = OP (उभयनिष्ठ भुजा)

OQ = OR (वृत्त की त्रिज्याऐं)

अतः R.H.S.सर्वांगसमता नियम से,

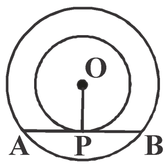
$\Delta PQO \cong \Delta PRO$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाऐं समान होती हैं।

भुजा PQ = भुजा PR

3. सिद्ध करो कि दो संकेन्द्रीय वृत्तों में बड़े वृत की जीवा जो छोटे वृत को स्पर्श करती है, स्पर्श बिन्दु पर समद्विभाजित होती है?

हल.



दिया है:- O केन्द्र वाले दो संकेन्द्रीय वृत्त हैं

बड़े वृत्त की जीवा AB जो छोटे वृत को बिन्दु P पर स्पर्श करती है

सिद्ध करना है:- AP = BP

रचना :- OP को मिलाया।

उपपति :- AB छोटे वृत्त की स्पर्श रेखा है तथा OP त्रिज्या है।

$\therefore OP \perp AB$

अतः OP जीवा AB को समद्विभाजित करेगी क्योंकि केन्द्र से जीवा पर खींचा गया लंब उसे समद्विभाजित करता है। अर्थात - AP = BP

❖❖❖

अध्याय 11

वृतो से संबधित क्षेत्रफल

बहुविकल्प प्रश्न - 2, अंक (1), अतिलघुउत्तरात्मक - 1 (1 अंक)
लघुउत्तरात्मक - 1 (2 अंक) कुल अंक = 4

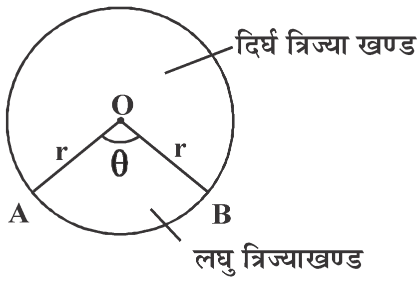
- ❖ **वृत की परिधि = $2\pi r$**
- ❖ **अर्द्ध वृत की परिधि / परिमाप = $\pi r + 2r$**
- ❖ **वृत का क्षेत्रफल = πr^2**
- ❖ **वृत के चतुर्थांश की परिधि** $= \frac{2\pi r}{4} + 2r$

$= \frac{\pi r + 4r}{2}$

- ❖ **अर्द्ध वृत का क्षेत्र** $= \frac{\pi r^2}{2}$

जहाँ $\pi = \frac{22}{7}$ अथवा 3.14 (लगाया) व r = वृत की त्रिज्या

- ❖ **वृत का त्रिज्य खण्ड :-** किसी वृत्त की दो त्रिज्याओं और एक चाप से घिरे क्षेत्र को वृत्त का त्रिज्य खण्ड कहते है।



- ❖ लघु त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल (A) = $\frac{\theta}{360^0} \times \pi r^2$
- ❖ दिर्घ त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{(360^0 - \theta)}{360^0} \times \pi r^2$

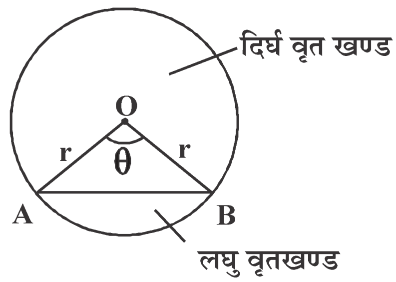
जहाँ θ चाप द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण, r वृत की त्रिज्या

- ❖ संगत चाप की लम्बाई (L) $= \frac{\theta}{360^0} \times 2\pi r$
- ❖ जब चाप की लम्बाई ज्ञात हो तो त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल

त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ × चाप की लम्बाई × त्रिज्या $= \frac{1}{2} \times l \times r$

Note:- यह चाप की लम्बाई व त्रिज्य खण्ड के क्षेत्रफल में संबंध को दर्शाता है।

- ❖ **वृत खण्ड:-** वृत की जीवा वृत को दो भागों में विभाजित करती हैं। इसमें बड़े भाग को दिर्घवृत खण्ड व छोटे भाग को लघु वृत खण्ड कहते है।



- ❖ लघु वृत खण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360^0} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$
- ❖ दिर्घ वृत खण्ड का क्षेत्रफल = वृत का क्षत्रे. - लघु वृतखण्ड का क्षेत्र. $= \pi r^2 - \left[\frac{\theta}{360^0} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta\right]$

जहाँ r = वृत की त्रिज्या, θ = चाप द्वारा वृत के केन्द्र पर बनाया गया कोण

कुछ महत्वपूर्ण बिन्दू:-

- ❖ **लघु चाप का डिग्री माप 180° से कम होता है।**
- ❖ **दीर्घ चाप का डिग्री माप 180° से अधिक होता है।**
- ❖ **वृत के प्रत्येक चतुर्थांश के कोण का डिग्री मान 90° होता है।**

❖ **वृत के केन्द्र पर बने कोण का डिग्री मान 360^o होता है।**

❖ **घड़ी के मिनट की सूई 1 मीनट में 6^o का कोण बनाती है।**

❖ **π एक अपरिमेय संख्या होती है।**

1. **त्रिज्या R वाले वृत के उस त्रिज्या खण्ड का क्षेत्रफल जिसका कोण P^0 है, निम्नलिखित है $= \frac{P^o}{360^o} \times \pi R^2$**

❖ वृत के अनुदिश एक चक्कर में तय दूरी को वृत की परिधि कहते है।

❖ वृत के केन्द्र पर बना कोण चार समकोण के बराबर होता है।

❖ दिर्घ त्रिज्य खण्ड का कोण =(360^0– लघु त्रिज्या खण्ड का कोण)

◈ बहुविकल्प प्रश्न -

प्र. 1. 10 cm त्रिज्या वाले वृत की एक जीवा वृत के केन्द्र पर समकोण अंतरित करती है तो जीवा की लम्बाई है-

(अ) $5/\sqrt{2}$ (ब) $5\sqrt{2}$

(स) $10\sqrt{2}$ (द) $10\sqrt{3}$ (स)

प्र. 2. किसी वृत के त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल 77 वर्ग सेमी है, यदि उस वृत की त्रिज्या 7cm हो तब त्रिज्य खण्ड के चाप की लम्बाई होगी-

(अ) 11cm (ब) 22cm

(स) 15cm (द) 9cm (ब)

प्र. 3. एक वृत की परिधि 44 सेमी है, तो उस वृत की त्रिज्या होगी-

(अ) 7cm (ब) 14cm

(स) 22cm (द) 28cm (अ)

प्र. 4. यदि वृत के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल, वृत के क्षेत्रफल का $\frac{1}{12}$ वां भाग हो तो त्रिज्य खण्ड का कोण होगा-

(अ) 20^0 (ब) 30^0

(स) 40^0 (द) 50^0 (ब)

प्र. 5. यदि वृत के लघुत्रिज्य खण्ड का कोण 250^o हो तो दिर्घ त्रिज्य खण्ड का कोण होगा-

(अ) 250^0 (ब) 110^0

(स) 80^0 (द) 360^0 (ब)

(संकेत 360^0 – 250^0 =110^0)

प्र. 6. यदि दो वृतो की त्रिज्याएं r_1 व r_2 है तो इन दोनो वृतो की परीधि के योग के समतुल्य परिधि के वृत की त्रिज्या r का मान होगा-

(अ) $r = r_1 + r_2$ (ब) $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$

(स) $r^2 = r_1^2 + r_2^2$ (द) $r = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}$ (अ)

प्र. 7. यदि एक वृत का परिमाप और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर है तो वृत की त्रिज्या होगी-

(अ) 2 मात्रक (ब) $\sqrt{2}$ मात्रक

(स) 3 मात्रक (द) 1 मात्रक (अ)

[संकेत $\pi r^2 = 2\pi r \Rightarrow [r = 2$ मात्रक]

प्र. 8. 14 सेमी व्यास वाले एक पहिये द्वारा एक चक्कर में तय की गयी दूरी होगी-

(अ) 122 सेमी (ब) 44 सेमी

(स) 54 सेमी (द) 84cm (ब)

प्र. 9. घड़ी के मीनट की सूई द्वारा 20 मीनट में केन्द्र पर आन्तरित कोण का मान ज्ञात किजिए-

(अ) 60^0 (ब) 40^0

(स) 20^0 (द) 120^0 (द)

प्र. 10. उस त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके चाप की लम्बाई (L) = 10 सेमी और त्रिज्य (r) 6 सेमी है-

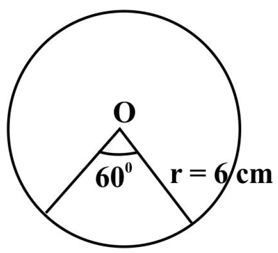
(अ) $40cm^2$ (ब) $160cm^2$

(स) $30cm^2$ (द) $80cm^2$ (स)

◈ अति लघुउत्तरात्मक प्रश्नः-

1. **6 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत के लघु त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसका कोण 60^o है।**

हलः-



केन्द्र का कोण $\theta = 60^0$

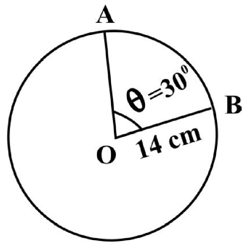
त्रिज्या (r) = 6cm

त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2\theta}{360^0}$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{6 \times 6 \times 60^0}{360^0} = \frac{132}{7} = 18.86 cm^2$$

2. एक घड़ी के मिनट की सूई जिसकी लम्बाई 14cm है। इस सूई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात करो-

हल:-



घड़ी के मिनट की सूई द्वारा 1 मीनट में बनाया गया कोण = 6^0

अत: 5 मीनट में रचित कोण $=6^0 \times 5 = 30^0$

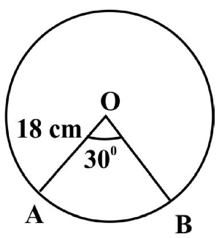
$\theta = 30^0$

सूई की लम्बाई = (r) = 14cm

सूई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360^0} \times \pi r^2$

$$= \frac{30^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = \frac{154}{3} cm^2$$

3. चित्र में वृत का केन्द्र 0 है। वृत की त्रिज्या 18 सेमी है तथा $\angle AOB$ =30° तो चाप AB की लम्बाई है-



हल:- यहाँ r =18cm व $\theta = 30^0$

चाप की लम्बाई $= \frac{2\pi r\theta}{360^0} = \frac{\pi r\theta}{180^0} = \frac{22}{7} \times \frac{18 \times 30}{180^0} = \frac{66}{7}$ सेमी²

4. 15 cm त्रिज्या वाले वृत का एक चाप केन्द्र पर 60° का कोण अंतरित करता है। ज्ञात करो-

(i) चाप की लम्बाई (ii) संगत लघु व दिर्घ त्रिज्य खण्डों का क्षेत्रफल ($\pi = 3.14$ व $\sqrt{3} = 1.73$)

हल:- वृत की त्रिज्या (r) = 15cm

चाप द्वारा केन्द्र पर आंतरित कोण (θ) = 60^0

(i) संगत चाप की लम्बाई $(L) = \frac{\theta}{360^0} \times 2\pi r$

$$= \frac{60^0}{360^0} \times 2 \times 3.14 \times 15 = 15.7 cm$$

(ii) लघु त्रिज्य खण्ड का क्षे.

$$= \frac{\theta}{360^0} \times \pi r^2 = \frac{60^0}{360^0} \times 3.14 \times 15 \times 15 = \frac{706.5}{6} = 117.75 \text{ सेमी.}^2$$

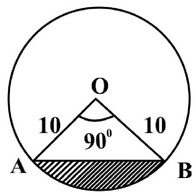
दीर्घ त्रिज्य खण्ड का क्षे.

$$= \frac{360^0 - \theta}{360^0} \times \pi r^2 = \frac{360^0 - 60^0}{360^0} \times 3.14 \times 15 \times 15 = \frac{300^0}{360^0} \times 3.14 \times 15 \times 15$$

$$= \frac{3532.5}{6} = 588.75 \text{ सेमी}^2$$

5. 10 cm त्रिज्या वाले एक वृत की कोई जीवा केन्द्र पर एक समकोण आंतरित करती है। संगत लघु वृत खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल:-



वृत की त्रिज्या (r) = 10cm

केन्द्र पर बना कोण (θ) = 90^0

संगत लघु वृत खण्ड को क्षे. $= \frac{\pi r^2\theta}{360^0} - \frac{r^2}{2}\sin\theta$

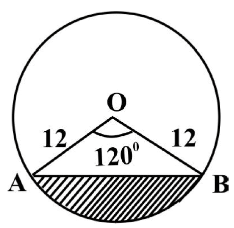
$$= \frac{3.14 \times 10 \times 10 \times 90^0}{360^0} - \frac{10 \times 10}{2}\sin 90^0$$

$$= \frac{314}{4} - 50 \times 1 \qquad \{\sin 90^0 = 1\}$$

$$= 78.5 - 50 = 28.5 cm^2$$

6. त्रिज्या 12 सेमी वाले वृत की कोई जीवा केन्द्र पर 120° का कोण अंतरित करती है संगत लघु वृत खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करो। $\{\pi = 3.14\}$

हल:-



त्रिज्या (r) =12cm . $\theta = 120^0$

वृत खण्ड का क्षे. $=\frac{\theta}{360^0}\pi r^2-\frac{r^2}{2}\sin\theta$

$=\frac{120^0}{360^0}\times3.14\times12\times12-\frac{12\times12}{2}\sin120^0$

$=\frac{3.14\times12\times12}{3}-\frac{144}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\left[\text{जहाँ}\sin120^0=\cos30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$=\frac{3.14\times12\times12}{3}-36\times1.73\ \{\sqrt{3}=1.73\}$

$=150.72-62.28=88.44$ सेमी^{2}

◈ लघुत्तरात्मक प्रश्नः-

1. किसी कार के दो वाइपर परस्पर कभी आच्छादित नहीं होते है। प्रत्येक वाइपर की पत्ती की लम्बाई 25 cm है। और 115^0 के कोण तक घूम कर सफाई कर सकती है। पत्तियों की प्रत्येक बुहार के साथ जितना क्षेत्रफल साफ हो जाता है, वह ज्ञात करो?

हलः- पत्ति की लम्बाई (r) = 25cm

त्रिज्या खण्ड का कोण (θ) = 115^0

वाइपर त्रिज्यखण्ड के रूप में घुमता है।

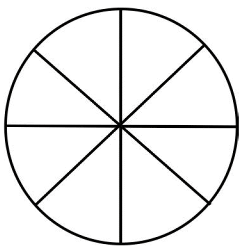
त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल = एक पत्ति द्वारा घूमा गया क्षेत्रफल

$=\frac{\pi r^2\theta}{360^0}=\frac{22}{7}\times\frac{25\times25\times115^0}{360^0}$

अतः वाइपर को दो पत्तियों द्वारा घुमा गया क्षेत्रफल

$=2\times\frac{22}{7}\times\frac{25\times25\times115^0}{360^0}=1255cm^2$

2. एक छत्तरी में आठ ताने है, जो बराबर दूरी पर है। छतरी को 45cm त्रिज्या वाला एक सपाट वृत मानते हुए इसके दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात करो?



हलः- प्रश्नानुसार, वृत की त्रिज्या (r) = 45cm

तानों की संख्या =8

केन्द्रिय कोण $\theta=\frac{360^0}{8}=45^0$

दो क्रमागत तानो के बीच का क्षे. $=\frac{\pi r^2\theta}{360^0}=\frac{22}{7}\times\frac{45\times45\times45^0}{360^0}$

$=\frac{11\times45\times45}{7\times4}=\frac{22275}{28}cm^2$

3. 15 मीटर भुजा वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने पर लगे खूटें से एक घोड़े को 5 मीटर लम्बी रस्सी से बाँधा गया है। मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो जहाँ घोड़ा घास चर सकता है।

हलः- रस्सी की लम्बाई (r) = 5 मीटर

केन्द्रीय कोण (θ) = 90^0 (वर्ग का प्रत्येक कोण = 90^0)

घोड़े के घास चर सकने वाले भाग का क्षे. $=\frac{\pi r^2\theta}{360^0}$

$=\frac{22}{7}\times\frac{5\times5\times90^0}{360^0}=\frac{11\times25}{7\times2}=19.64$ मीटर^2

◈ अन्य महत्वपूर्ण प्रश्नः-

1. जहाजों को समुद्र में जलस्तर के निचे स्थित चट्टानों को चेतावनी देने के लिए एक लाइट हाउस 80^0 कोण वाले एक त्रिज्यखण्ड में 16.5 कि.मी. की दूरी तक लाल रंग का प्रकाश फैलाता है। समुद्र के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो जहां तक जहाजों को चेतावनी दी जा सके? $[\pi=3.14]$
2. त्रिज्या 21 सेमी वाले वृत का एक चाप केन्द्र पर 60^0 का कोण आंतरित करता है, तो संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करो?
3. एक चाप केन्द्र पर 45^{0}का कोण आन्तरित करता है। यदि इसके लघु त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल 77 cm^2 है, तो वृत की त्रिज्या ज्ञात करो।

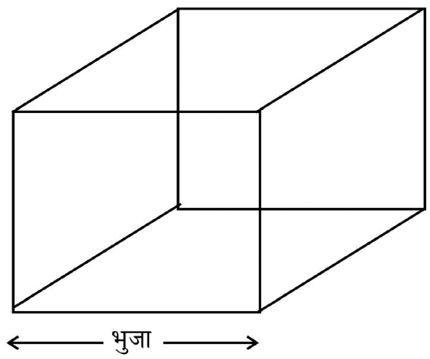
अध्याय 12

पृष्ठीय क्षेत्रफल व आयतन

बहुविकल्प प्रश्न -1 , अंक (1), रिक्तस्थान प्रश्न - 1, अंक (1)

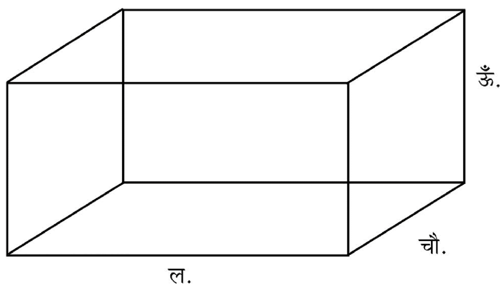
अतिलघुउत्तरात्मक - 4 (4 अंक) कुल अंक = 6

(1) घन-



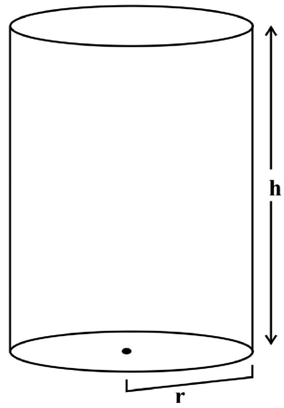
- ❖ फलक = 6, किनारे = 12, शीर्ष = 8
- ❖ घन का क्षेत्रफल =$6\times$भुजा^{2}
- ❖ घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षे.=$4\times$भुजा^{2}
- ❖ घन के आधार का क्षे. = भुजा^{2}
- ❖ घन के विकर्ण की लम्बाई= $\sqrt{3}\times$ भुजा
- ❖ घन का आयतन=भुजा^{3}

(2) घनाभः-



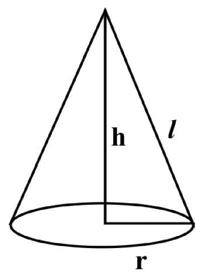
- ❖ घनाभ का क्षे.=2 (ल.×चौ+चौ.×ऊँ+ऊँ×ल.)
- ❖ घनाभ का पार्श्वपृष्ठीय क्षेत्रफल/कमरे की चारो दीवारो का क्षे.=2×ऊँचाई(ल.+चौ.)
- ❖ घनाभ के आधार का क्षे.=ल.×चौ.
- ❖ घनाभ का आयतन =ल.×चौ.×ऊ.
- ❖ घनाभ के विकर्ण की ल.= $\sqrt{(\text{ल.})^2+(\text{चौ.})^2+(\text{ऊ.})^2}$

(3) बेलनः-



- ❖ बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षे.= $2\pi rh$
- ❖ बेलन के आधार का क्षे. = πr^2
- ❖ बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षे. = $2\pi r(r+h)$
- ❖ बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$
- ❖ खोखले बेलन में दोनों सिरे खुले होते है। ठोस बेलन में दोनों सिरे बन्द होते है।

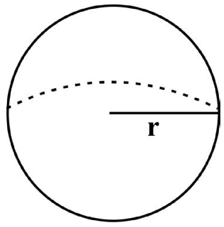
(5) शंकु :-



- ❖ शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षे.$= \pi rl$
- ❖ शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षे.$= \pi r(r+l)$
- ❖ शंकु के आधार का क्षे.$= \pi r^2$
- ❖ शंकु की तिर्यक ऊचाई $l=\sqrt{r^2+h^2}$

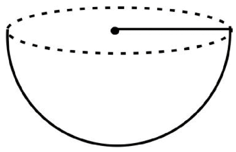
❖ शंकु का आयतन $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

(6) गोला:- वृत या अर्द्ध वृत के व्यास को अक्ष मानकर उसके चारों और चककर लगाने पर जो ठोस बनता है। उसे गोला कहते है।



❖ गोले का पृष्ठीय क्षे. $= 4\pi r^2$

❖ गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$



❖ अर्द्धगोले का वक्र पृ.क्षे. $= 2\pi r^2$

❖ अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृ.क्षे. $= 3\pi r^2$

❖ अर्द्ध गोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

❖ व्यास=2×त्रिज्या [d=2r]

❖ 1 लीटर = 1000 घन सेमी

❖ 1 घन मीटर = 1000 लीटर

❖ 1 मीटर = 100 सेमी

❖ क्षेत्रफल को वर्ग इकाई व आयतन को घन इकाई में मापा जाता है।

❖ किसी ठोस द्वारा आकाश में जितना स्थान घेरा जाता है। वह उसका आयतन कहलाता है।

◈ बहुविकल्प प्रश्न:-

प्र. 1. एक घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 1014 मी.^{2} है। घन की भुजा होगी ?

(अ) 6.5 मीटर (ब) 13 मीटर

(स) 26 मीटर (द) 169 मीटर (ब)

हल- घन का सम्पूर्ण क्षे.=1014

6×भुजा^{2}=1014

भुजा^{2}=$\frac{1014}{6}$

भुजा^{2}=169

भुजा=13 मीटर

प्र. 2. एक गोले का व्यास 6 सेमी है। गोले का आयतन होगा।?

(अ) 16π घन सेमी (ब) 20π घन सेमी

(स) 36π घन सेमी (द) 288π घन सेमी (स)

हल- $r = \frac{6}{2} = 3$

गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\times\pi\times3\times3\times3 = 36\pi cm^3$

प्र. 3. दो गोले की त्रिज्याएँ 1:2 में है। उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात होगा?

(अ) 1:2 (ब) 2:6

(स) 1:4 (द) 2:3 (स)

हल- $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 1:4$$

प्र. 4. शंकू की त्रिज्या 6 सेमी तथा ऊँचाई 8 सेमी है। शंकू की तिर्यक ऊँचाई होगी?

(अ) 5 सेमी (ब) 6 सेमी

(स) 10 सेमी (द) 14 सेमी (स)

हल- $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ सेमी

प्र. 5. भुजा 7 cm वाले एक घनाकार ब्लॉक के ऊपर एक अर्द्ध गोला रखा है। अर्द्ध गोले का अधिकतम व्यास होगा?

(अ) 7 cm (ब) 14 cm

(स) 21 cm (द) 28 cm (अ)

हल- (अर्द्ध गोले का व्यास =घन की भुजा)

प्र. 6. एक ठोस एक अर्द्ध गोले पर खड़े एक शंकु के आकार का है। जिनकी त्रिज्याएँ 1 cm है। तथा शंकु की ऊँचाई उसकी त्रिज्या के समान है। ठोस का आयतन होगा ?

(अ) πcm^3 (ब) $2\pi cm^3$

(स) $3\pi cm^3$ (द) $3\pi cm^3$ (अ)

हल- ठोस का आ.=अर्द्धगोले का आ.+शंकु का आ.

$= \frac{2}{3}\pi 1^3 + \frac{1}{3}\pi 1^2 \times 1$

$= \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{3\pi}{3} = \pi cm^3$

प्र. 7. यदि एक बेलन की ऊँचाई 11 cm तथा उसका वक्र

पृ.क्षे.968 सेमी^{2} है। तो बेलन की त्रिज्या होगी?

(अ) 10 सेमी (ब) 11 सेमी

(स) 12 सेमी (द) 14 सेमी (द)

हल- बेलन का वक्र पृ. क्षे.=968

$$2\pi rh = 968$$

$$r = \frac{968}{2\pi h} = \frac{968\times7}{2\times22\times11} = \frac{968\times7}{484} = 2\times7 = 14cm$$

प्र. 8. एक घनाभ की ल.,चौ. और ऊँ. क्रमशः 6 मी., 4 मी. और 3 मी. है। घनाभ की चारों दिवारों का क्षेत्रफल होगा ?

(अ) 60 मी.^{2} (ब) 72 मी.^{2}

(स) 84 मी.^{2} (द) 128 मी.^{2} (अ)

हल- चारो दिवारों का क्षे.=2 (ल.+चौ.)×ऊँ.

=2(6+4)×3

=2×(10)×3=60 मी.^{2}

प्र. 9. एक ठोस अर्द्ध गोले की त्रिज्या 7 सेमी है। तो इसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा ?

(अ) 336 सेमी^{2} (ब) 462 सेमी^{2}

(स) 256 सेमी^{2} (द) 149 सेमी^{2} (ब)

हल- $S = 3\pi r^2 = 3\times\frac{22}{7}\times7\times7 = 462$ सेमी^{2}

प्र. 10. एक घन का आयतन ज्ञात कीजिए यदि घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल 384 सेमी^{2} है?

(अ) 8 सेमी^{3} (ब) 32 सेमी^{3}

(स) 64 सेमी^{3} (द) 512 सेमी^{3} (द)

हल- घन का क्षे. =384

$6a^2 = 384 \Rightarrow a^2 = \frac{384}{6} = 64 \Rightarrow a = 8, V = a^3 = 8^3 = 512$ सेमी^{3}

◈ रिक्त स्थान प्रश्नः-

रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।

(1) 36 π घन सेमी आयतन वाले गोले की त्रिज्या .... है।

उत्तर- (3 सेमी)

(2) एक बेलन जिसकी ऊँचाई 3 सेमी है। तथा बेलन का वक्र पृष्ठ 66 सेमी^{2} है। तो उसकी त्रिज्या .... होगी।

उत्तर- (3.5 सेमी)

(3) एक बेलन और एक शंकु के आधार तथा ऊचाईयाँ समान है। उनके आयतनों का अनुपात .... होगा।

उत्तर- (3:1)

(4) एक गोले की त्रिज्या 7 सेमी है। इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ...... होगा।

उत्तर- (616 सेमी^{2})

(5) एक घनाभ की विमायें 5 सेमी ×4 सेमी × 3 सेमी है। इसका पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल .... होगा।

उत्तर- (54 सेमी^{2})

(6) एक वृत को उसके व्यास के इर्द-गिर्द घुमाने पर प्राप्त ठोस आकृति को .... कहते हैं।

उत्तर- (गोला)

(7) एक अर्द्ध गोले की त्रिज्या 3.5 सेमी है। इसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल .... होगा।

उत्तर- (115.5 सेमी^{2})

(8) एक शंकु का आयतन 308 सेमी^{3} और ऊँचाई 6 सेमी है। उसके आधार की त्रिज्या .... होगी ।

उत्तर- (7 सेमी)

◈ अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न-

(1) एक बन्द लकड़ी के बक्से की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 90 सेमी, 50 सेमी और 30 सेमी है। बक्से का बाहरी पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल- ल.=90 सेमी, चौ.=50 सेमी, ऊ.=30 सेमी

बाहरी पृ. क्षे. =2(ल.×चौ.+चौ×ऊँ+ऊँ×ल.)

=2(90×50+50×30+30×90)

=2(4500+1500+2700)

=2×8700=17400 वर्ग सेमी

(2) दो घनों जिनमें प्रत्येक का आयतन 64 cm^3 है। के संलग्न फलकों को मिलाकर एक ठोस बनाया जाता है। इससे प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल- घन का आयतन = 64 cm^3

$a^3 = 4^3$

$a = 4$ सेमी($\because$ दोनो घनों के संलग्न फलको को मिलाने पर घनाभ बनता है)

घनाभ की ल.=4+4=8सेमी

चौ.=4 सेमी

ऊँ.=4 सेमी

घनाभ का पृ.क्षे.=2(ल.×चौ.+चौ×ऊँ+ऊँ×ल.)

=2(8×4+4×4+4×8)

$=2(32+16+32)$

$=2\times80=160$ सेमी^{2}

(3) भुजा 7 सेमी वाले एक घनाकार ब्लॉक के ऊपर एक अर्द्ध गोला रखा हुआ है अर्द्ध गोले का अधिकतम व्यास क्या हो सकता है। ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल- घन की भुजा=7 सेमी

अर्द्ध गोले का अधिकतम व्यास =7 सेमी

अर्द्ध गोले की त्रिज्या $r=\frac{7}{2}$ सेमी

ठोस का पृष्ठीय क्षे.= $6\times$भुजा$^2 - \pi r^2 + 2\pi r^2$

$=6\times$भुजा$^2 + \pi r^2$

$=6\times7^2+\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}=6\times49+\frac{11\times7}{2}$

$=294+38.5=332.5$ सेमी^{2}

(4) लकड़ी के एक ठोस बेलन के प्रत्येक सिरे पर एक अर्द्ध गोला खोदकर निकाला गया है। यदि बेलन की ऊँचाई 10 cm है। और आधार की त्रिज्या 3.5 सेमी है। तो इस वस्तु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल- बेलन की ऊचाई $h=10cm$

बेलन की त्रिज्या $r=3.5cm$

अर्द्ध गोले की त्रिज्या $r=3.5$

वस्तु का सम्पूर्ण पृ.क्षे. =बेलन का वक्र पृ.क्षे.+2अर्द्ध गोले का वक्र पृ.क्षे.

$=2\pi rh+2\times2\pi r^2$

$=2\pi r(h+2r)$

$=2\times\frac{22}{7}\times3.5(10+2\times3.5)$

$=\frac{44}{7}\times\frac{35}{10}(10+7)$

$=\frac{44}{7}\times\frac{35}{10}\times17$

$=22\times17=374$ सेमी^{2}

(5) घन के एक पृष्ठ का परिमाप 28 सेमी है। तो घन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल- घन के एक पृष्ठ का परिमाप=28 सेमी

$4\times$भुजा $=28$

भुजा$=\frac{28}{4}=7$ सेमी

घन का आयतन =भुजा^{3}

$=7^3=343$ घन सेमी

(6) एक रोलर की लम्बाई 2 मी. और व्यास 1.4 मी. है। ज्ञात कीजिए 5 चक्कर लगाने में रोलर कितना क्षेत्र समतल करेगा।

हल- रोलर की ल.$(h)=2$ मी.

रोलर का व्यास=1.4मी.,त्रिज्या $r=\frac{1.4}{2}=0.7$ मी.

रोलर के एक चक्कर में समतल किया क्षे.=वक्र पृ.क्षे.

$=2\pi rh=2\times\frac{22}{7}\times0.7\times2$

$=2\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{10}\times2$ $\quad=\frac{88}{10}=8.8$ मी.^{2}

5 चक्कर में समतल किया गया क्षे.$=5\times8.8=44$ मी.^{2}

(7) एक शंकु के आधार का व्यास 12 मीटर और तिर्यक ऊँचाई 10 मीटर है। शंकु का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल- शंकु का व्यास=12 मीटर

त्रिज्या (r)= 6 मीटर

तिर्यक ऊँचाई (l) = 10 मीटर

शंकु का सम्पूर्ण पृ.क्षे.$=\pi r(r+l)$

$=\frac{22}{7}\times6(6+10)$

$=\frac{22}{7}\times6\times16$

$=\frac{2112}{7}=301.71$ वर्ग मीटर

(8) यदि एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 5544 सेमी है। तो गोले का व्यास होगा।

हल- गोले का क्षे.=5544

$4\pi r^2=5544$

$r^2=\frac{5544}{4\pi}=\frac{5544\times7}{4\times22}$

$r^2=\frac{5544\times7}{88}$

$r^2=63\times7$

$r^2=441$

$r=21$ सेमी

अत: गोले का व्यास =2×21=42 सेमी

(9) 9 मीटर ऊँचे शंकु के आकार के टेंट के आधार की परिधि 44 मी. है। इसके अन्दर की वायु का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल- शंकु की ऊँचाई h = 9 मी.

आधार की परिधि = 44 मी.

$$2\pi r = 44$$

$$r = \frac{44}{2\pi} = \frac{44}{2\times 22}\times 7 = 7 \text{ मी.}$$

हवा (शंकु) का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 7\times 7\times 9 = 22\times 21 = 462$ मी^{3}

(10) एक ठोस धातु के अर्ध गोले का व्यास 42सेमी है। इसके सम्पूर्ण पृष्ठ पर 20 पैसे प्रति सेमी^{2} की दर से पालिश कराने का व्यव ज्ञात कीजिए।

हल- अर्द्ध गोले का व्यास= 42 सेमी

त्रिज्या $(r) = \frac{42}{2} = 21$ सेमी

अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण क्षे. $= 3\pi r^2$

$= 3\times\frac{22}{7}\times 21\times 21$

$= 3\times 22\times 21\times 3$

$= 4158$ सेमी^{2}

अत: 20 पैसे प्रति सेमी^{2} की दर से पॉलिश कराने व्यय

$= 4158\times\frac{20}{100}$ रुपये

$= \frac{83160}{100} = 831.60$ रुपये

◈ अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न:-

(1) किसी शंकु की तिर्यक ऊँचाई 5 cm तथा ऊँचाई 4 cm है। इसका व्यास होगा।

(2) एक बेलन की ऊँचाई 21 सेमी है। तथा आधार का क्षेत्रफल 154 सेमी^{2} है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

(3) एक ठोस अर्द्ध गोले की त्रिज्या 7 cm है। इसका सम्पूर्ण पृ. क्षे. ज्ञात कीजिए।

(4) एक घनाभ 12 cm लम्बा, 9 cm चौड़ा और 5 सेमी ऊँचा है। घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षे. और आयतन ज्ञात कीजिए।

(5) 6 मीटर भुजा के वर्गाकार फर्श के कमरे में 180 घन मीटर हवा है। कमरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

(6) यदि एक बर्तन एक उल्टे शंकु के आकार का है। इसकी ऊँचाई 8 सेमी है। और इसके ऊपरी सिरे (जो खुला हुआ है) की त्रिज्या 5 cm है। यह ऊपर तक पानी से भरा हुआ है। जब इस बर्तन में सीसे की कुछ गोलियाँ जिनमें प्रत्येक 0.5 cm त्रिज्या का गोला है। डाली जाती है। तो इसमें से भरे पानी का $\frac{1}{4}$ भाग बाहर निकल जाता है। डाली गई गोलियाँ की संख्या ज्ञात कीजिए।

❖❖❖

अध्याय 13

सांख्यिकी

रिक्त स्थान प्रश्न - 2, अंक (2), अतिलघुउत्तरात्मक - 4, अंक (4)
दीर्घउत्तरात्मक - 1, अंक (3), निबंधात्मक प्रश्न-1, अंक (4) कुल अंक = 13

❖ **केन्द्रीय प्रवृतिः**- ''आँकड़ों में से किसी एक आँकड़े के पास जाने की प्रवृति को केन्द्रीय प्रवृति कहते हैं।'' केन्द्रीय प्रवृति के तीन माप है:

(1) माध्य/समान्तर माध्य /औसत- $\bar{x}$

(2) माध्यक/माध्यिका - M

(3) बहुलक - Z

(1) माध्य

(A) व्यक्तिगत श्रेणी से माध्यः- यदि किसी चर राशि के x मान क्रमशः $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ हो तो माध्य

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$\sum$ (सिग्मा) ग्रीक वर्णमाला का अक्षर है जो योग को दर्शाता है।

(B) अवर्गीकृत/वर्गीकृत श्रेणी से माध्यः- ज्ञात करने की तीन विधियाँ है जो निम्न है:

(i) प्रत्यक्ष विधि: माध्य $= \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}$ यहाँ $\sum F = N =$ बारम्बारताओं का योग

(ii) कल्पित माध्य विधि: माध्य $(\bar{x}) = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

यहाँ a = कल्पित माध्य

$d_i = x_i - a$

(iii) पग-विचलन विधि: माध्य $(\bar{x}) = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

यहाँ a = कल्पित माध्य

h = वर्ग माप

$u = \frac{x_i - a}{h}$

या $\bar{x} = a + \bar{u}h$ यहाँ $\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$

Note: वर्गीकृत श्रेणी का माध्य निकालने के लिए सारणी में हमेशा मध्यमान निकाला जाता है।

(2) माध्यक/माध्यिका(M): - माध्यक केन्द्रीय प्रवृति का ऐसा माप है जो आँकड़ो में सबसे बीच का मान देता है।

(A) व्यक्तिगत श्रेणी से माध्यकः- सर्वप्रथम दिये गये आंकड़ों का आरोही /अवरोही क्रम में लिखा जाता है। माना n आंकड़े हो तो

(i) जब n विषम हो - माध्यक (M) $= \frac{n+1}{2}$ वाँ पद

(ii) जब n सम हो - माध्यक (M) $= \frac{\frac{n}{2}\text{ वाँ पद} + \left(\frac{n+2}{2}\right)\text{ वाँ पद}}{2}$

B अवर्गीकृत श्रेणी से माध्यकः- सर्वप्रथम संचयी बारम्बारता (C.F.) ज्ञात करना । फिर $\frac{N}{2} = \frac{\sum F}{2}$ से ठीक बड़ी C.F. वाला चर मान माध्यक होगा।

(C) वर्गीकृत श्रेणी से माध्यक :- इसमें अवर्गीकृत श्रेणी के समान - माध्यक वर्ग प्राप्त होता है। $M = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - C.F.\text{पूर्व}}{F\text{संगत}}\right) \times h$

यहाँ l = माध्यक वर्ग की निम्न सीमा है।

N = बारम्बारताओं को योग

C.F.= माध्यक वर्ग के ठीक पूर्व वर्ग की संचय बारम्बारता

F = माध्यक वर्ग की बारम्बारता

Note: अवर्गीकृत/वर्गीकृत श्रेणी से माध्यक ज्ञात करने के लिए सारणी में हमेशा C.F. निकाला जाता है।

(3) बहुलक (Z): दिए हुए प्रेक्षणों में प्रेक्षण का वह मान है जो सबसे अधिक बार आता है अर्थात् उस प्रेक्षण में जिसकी बारम्बारता सर्वाधिक होती हो, बहुलक कहलाता है।

(A) व्यक्तिगत श्रेणी से बहुलकः- सबसे ज्यादा बार आने वाली संख्या बहुलक होता है।

(B) अवर्गीकृत श्रेणी से बहुलकः- सबसे ज्यादा बारम्बारता के संगत चर का मान बहुलक होता है।

(C) वर्गीकृत श्रेणी से बहुलकः- सर्वप्रथम अधिकतम बारम्बारता के संगत बहुलक वर्ग ज्ञात करते है।

बहुलक (Z) $= l + \left(\frac{F_1 - F_o}{2F_1 - F_o - F_2}\right) \times h$

यहाँ l = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

h = वर्ग अंतराल की माप

F_1 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता

F_o = बहुलक वर्ग की ठीक पूर्व की बारम्बारता

F_2 = बहुलक वर्ग के ठीक बाद की बारम्बारता

(i) परास (Range)= अधिकतम मान- न्यूनतम मान

(ii) वर्ग अन्तराल (h)= वर्ग की उच्च सीमा - वर्ग की निम्न सीमा

(iv) 3 माध्यक = बहुलक +2 माध्य (तीनों केन्द्रीय प्रवृति के मापकों में एक आनुभाविक संबंध)

❖ बंटन कम प्रकार का है तो हमें वर्ग अंतरालों की उपरि सीमाएँ प्राप्त होती है।

❖ बंटन अधिक प्रकार का है तो हमें वर्ग अंतरालों की निम्न सीमाएँ प्राप्त होती है।

◈ रिक्त स्थान प्रश्न -

प्रश्न 1. केन्द्रीय प्रवृति का अधिकतर प्रयोग होने वाला मापक ...... है।

हल: माध्य

प्रश्न 2. यदि 3, 7, 9, x, 5 का समान्तर माध्य 6 हो तो x का मान..... होगा।

हल: $\because \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

$$6 = \frac{3+7+9+x+5}{5}$$

$$\Rightarrow 6\times 5 = 24 + x$$

$$\Rightarrow 30 = 24 + x$$

$$\Rightarrow x = 30 - 24 = 6$$

प्रश्न 3. वर्ग अन्तराल (10-35) का वर्ग चिन्ह ज्ञात कीजिए।

हल: वर्ग चिन्ह $(x) = \frac{35+10}{2} = \frac{45}{2} = 22.5$

प्रश्न 4. आंकड़ों 8, 6, 12, 4, 25, 3 का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल: परिसर = अधिकतम मान - न्यूनतम मान

= 25- 3 = 22

प्रश्न 5. प्रथम 10 सम प्राकृत संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल: $$\bar{x} = \frac{2+4+6+8+10+12+14+16+18+20}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{110}{10} = 11$$

प्रश्न 6. किसी श्रेणी का सर्वाधिक बारम्बारता मूल्य ...... कहलाता है।

हल: बहुलक

प्रश्न 7. संचयी बारम्बारता सारणी का उपयोग .... ज्ञात करने में होता है।

हल: माध्यक

प्रश्न 8. प्रथम पाँच पूर्ण संख्याओं का औसत .... है।

हल: $$\bar{x} = \frac{0+1+2+3+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

प्रश्न 9. 3, 5, 7, 4, 2, 1, 4, 3, 4 का बहुलक .... है।

हल: 4 (4 की बारम्बारता सर्वाधिक है)

प्रश्न 10. बहुलक =3×(......) - 2 माध्य

हल: माध्यक

◈ अति लघुरात्मक प्रश्न-

प्रश्न 11. बंटन 7, 4, 6, 3, 8, 5, 9 की माध्यिका होगी।

हल: सर्वप्रथम आरोही क्रम में लिखने पर- 3, 4, 5, 6, 7,8,9

यहा 7 संख्यायें है जो कि विषम संख्या है-

$M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ पद

$M = \left(\frac{7+1}{2}\right)$ वाँ पद = 4 वाँ पद

अतः $M = 6$

प्रश्न 12. बंटन 1, 3, 2, 5, 9, 11 का माध्यक ज्ञात कीजिए।

हल: सर्वप्रथम आरोही क्रम में लिखने पर- 1, 2, 3, 5, 9, 11

यहाँ पदों की संख्या 6 है जो कि सम संख्या है।

$$\because M = \frac{\frac{n}{2}\text{ वाँ पद} + \left(\frac{n+2}{2}\right)\text{ वाँ पद}}{2}$$

$$\Rightarrow M = \frac{\frac{6}{2}\text{ वाँ पद} + \left(\frac{6+2}{2}\right)\text{ वाँ पद}}{2}$$

$$\Rightarrow M = \frac{3\text{ वाँ पद} + 4\text{ वाँ पद}}{2}$$

$$\Rightarrow M = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

प्रश्न 13.

x	1	3	5	7
F	3	2	1	2

बंटन का माध्य और माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल: माध्य

x	F	Fx
1	3	3
3	2	6
5	1	5
7	2	14
	$\Sigma F = 8$	$\Sigma Fx = 28$

$$\because \bar{x} = \frac{\Sigma Fx}{\Sigma F} = \frac{28}{8} = 3.5$$

माध्यिका

x	F	$C.F$
1	3	3
3	2	5
5	1	6
7	2	8

$\frac{\Sigma F}{2}=\frac{N}{2}=\frac{8}{2}=4$ से ठीक बड़ी $C.F=5$ के संगत चर 3 है इसलिए माध्यिका $(M)=3$

प्रश्न 14.

x	5	10	15	20
F	3	7	2	4

बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ सर्वाधिक बारम्बारता '7' है के संगत चर का मान 10 है। इसलिए इस बंटन का बहुलक 10 है।

प्रश्न 15. निम्न बंटन में P का मान लिखिए-

x	10	15	20	25	30
F	2	5	P	3	2
$C.F$	2	7	10	13	15

हल: $7+P=10 \Rightarrow P=10-7=3$

◈ दीर्घ उत्तरात्मक/निबंधात्मक प्रश्नः-

प्रश्न 1. वायु में सल्फर - डाई -ऑक्साइड (SO_2) की सान्द्रता (भाग प्रति मिलियन में) को ज्ञात करने के लिए, एक नगर के 30 मोहल्लों से आँकड़े एकत्रित किए गए, जिन्हें प्रस्तुत किया गया है:

SO_2 की सान्द्रता	0.00-0.04	0.04-0.08	0.08-0.12	0.12-0.16	0.16-0.20	0.20-0.24
बारम्बारता	4	9	9	2	4	2

हल:

SO_2 की सान्द्रता	F	x	Fx
0.00-0.04	4	0.02	0.08
0.04-0.08	9	0.06	0.54
0.08-0.12	9	0.10	0.90
0.12-0.16	2	0.14	0.28
0.16-0.20	4	0.18	0.72
0.20-0.24	2	0.22	0.44
योग	$\Sigma F=30$		$\Sigma Fx=2.96$

$\bar{x}=\frac{\Sigma Fx}{\Sigma F}=\frac{2.96}{30}$

$=0.0986\,ppm$

प्रश्न 2. निचे दिये गए बंटन का कल्पित विधि से माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	7	6	6	6

हल:

वर्ग अंतराल	F	x	$d=x-a$	Fxd
10-25	2	17.5	-30	-60
25-40	3	32.5	-15	-45
40-55	7	47.5	0	0
55-70	6	62.5	15	90
70-85	6	77.5	30	180
85-100	6	92.5	45	270
योग	$\Sigma F=30$			$\Sigma Fd=435$

माना कल्पित माध्य $(a)=47.5$

$\because$ कल्पित माध्य $(\bar{x})=a+\frac{\Sigma Fd}{\Sigma F}$

$=47.5+\frac{435}{30}$

$=47.5+14.5$

$=62$

प्रश्न 3. यदि निम्न बंटन का माध्य 7.5 हो तो P का मान ज्ञात कीजिए।

x	3	5	7	9	11	13
F	6	8	15	P	8	4

हल:

X	F	Fx
3	6	18
5	8	40
7	15	105
9	P	$9P$
11	8	88
13	4	52

$\Sigma F=41+P \quad \Sigma Fx=303+9P$

दिया है $\bar{x}=7.5$

$\because \bar{x} = \frac{\Sigma Fx}{\Sigma Fx}$

$7.5 = \frac{303+9P}{41+P}$

$\Rightarrow 7.5(41+P) = 303+9P$

$\Rightarrow 7.5\times41+7.5P = 303+9P$

$\Rightarrow 307.5+7.5P = 303+9P$

$\Rightarrow 307.5-303 = 9P-7.5P$

$\Rightarrow 4.5 = 1.5P$

$\Rightarrow \frac{4.5}{1.5} = P$

$\Rightarrow P = 3$

प्रश्न 4. एक जीवन बीमा एजेंट 100 पॉलिसी धारकों की आयु के बंटन के निम्नलिखित आँकड़े ज्ञात करता है माध्यक आयु परिकलित कीजिए।

आयु (वर्षा में)	पॉलिसी धारकों की संख्या
20 से कम	2
25 से कम	6
30 से कम	24
35 से कम	45
40 से कम	78
45 से कम	89
50 से कम	92
55 से कम	98
60 से कम	100

हल:

आयु (वर्षो में)	C.F	F
20 से कम	2	2
20-25	6	6-2=4
25-30	24	24-6=18
30-35	45	45-24=21
35-40	78	33
40-45	89	11
45-50	92	3
50-55	98	6
55-60	100	2

यहाँ $N = \Sigma F = 100$ तो

$\frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$ से ठीक बड़ी C.F (78) के संगत माध्यक वर्ग 35 से 40 है।

इसलिए $l = 35, F = 33, C.F = 45, h = 5$

$\because M = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - C.F}{F}\right)\times h$

$\because M = 35 + \left(\frac{50-45}{33}\right)\times 5$

$= 35 + \frac{5\times5}{33}$

$= 35 + \frac{25}{33} = 35 + 0.76$

$= 35.76$ वर्ष

प्रश्न 5. निम्न बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल:

वर्ग	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
परिवारों की संख्या	7	8	2	2	1

हल: यहाँ अधिकतम बारम्बारता 8 है तथा इस बारम्बारता का संगत वर्ग 3-5 है। अतः बहुलक वर्ग 3 से 5 है।

$l = 3, h = 2, F_1 = 8, F_o = 7, F_2 = 2$

बहुलक $(z) = l + \left[\frac{F_1 - Fo}{2F_1 - F_o - F_2}\right]\times h$

$z = 3 + \left[\frac{8-7}{2\times8-7-2}\right]\times 2$

$z = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$

अतः उपरोक्त ...... आँकड़ों का बहुलक 3.286 है।

प्रश्न 6. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक 525 है। यदि बारम्बारताओं का योग 100 है तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500
बारम्बारता	2	5	x	12	17
वर्ग अंतराल	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000
बारम्बारता	20	y	9	7	4

हल:

वर्ग अंतराल	बारम्बारता(F)	संचयी बारम्बारता(C.F)
0-100	2	2
100-200	5	7
200-300	x	7+x

300-400	12	$19+x$
400-500	17	$36+x$
500-600	20	$56+x$
600-700	y	$56+x+y$
700-800	9	$65+x+y$
800-900	7	$72+x+y$
900-1000	4	$76+x+y=\Sigma F$

दिया है कि $\Sigma F = N = 100$ तथा $\Sigma F = 76 + x + y$ से

अत: $76 + x + y = 100$

$\Rightarrow x + y = 100 - 76$

$\Rightarrow x + y = 24$ ....(1)

माध्यक (M)= 525, जो वर्ग 500-600 में स्थित है।

अत: $l = 500, F = 20, C.F = 36 + x, h = 100, \frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$

$\because M = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - C.F_{\text{पूर्व}}}{F_{\text{संगत}}} \right) \times h$

$525 = 500 + \left(\frac{50 - (36 + x)}{20} \right) \times 100$

$\Rightarrow 525 = 500 + \left(\frac{50 - 36 - x}{20} \right) \times 100$

$\Rightarrow 525 - 500 = \frac{14 - x}{20} \times 100$

$\Rightarrow 25 = (14 - x) \times 5$

$\Rightarrow 25 = 70 - 5x$

$\Rightarrow 5x = 70 - 25 = 45$

$\Rightarrow x = \frac{45}{5} = 9$

x का मान समी.(1) में रखने पर , 9+y=24

y=24-9=15

◈ अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न-

प्रश्न 1. सबसे अधिक देखे जाने वाला लोकप्रिय टीवी प्रोग्राम ज्ञात करने के लिए केन्द्रीय प्रवृति का कौनसा मापक ज्ञात करेगें?

प्रश्न 2. वर्गों की बारम्बारता बहुत छोटी और बहुत बड़ी हो तो (विषम वितरण) एक अच्छा प्रति निधित्व करने वाला मान ज्ञात करने के लिए कौनसा माप अधिक उपयुक्त रहता है?

प्रश्न 3. जब आंकड़े वितरण निरंतर सममित होता है तो आमतौर पर केन्द्रीय प्रवृति का कौनसा माप ज्ञात किया जाता हैं?

प्रश्न 4. निम्न बारम्बारता बंटन का C.F ज्ञात कीजिए।

x	1	2	3	4	5	6
F	2	4	5	4	2	2

प्रश्न 5. निम्नलिखित सारणी 35 नगरों की साक्षरता दर (%) में दर्शाती है। माध्य साक्षरता दर ज्ञात कीजिए:

साक्षर दर (% में)	44-55	55-65	65-75	75-85	85-95
नगरों की संख्या	3	10	11	8	3

प्रश्न 6. निम्न बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
F	10	35	52	61	38	29

प्रश्न 7. निम्न सारणी को 'से कम प्रकार' का संचयी बंटन में बदलिए।

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
विद्यार्थियों की संख्या	5	3	4	3	3	4

प्राप्तांक	60-70	70-80	80-90	90-100
विद्यार्थियों की संख्या	7	9	7	8

प्रश्न 8. एक पौधे की 40 पत्तियों की लम्बाइयाँ (mmमें) मापी जाती है तथा प्राप्त आँकड़ों को निम्नलिखित सारणी के रूप में निरूपित किया जाता है।

लम्बाई(mm)	118-126	127-135	136-144	145-153
पत्तियों की संख्या	3	5	9	12

लम्बाई(mm)	154-162	163-171	172-180
पत्तियों की संख्या	5	4	2

पत्तियों की माध्यक लम्बाई ज्ञात कीजिए।

❖❖❖

अध्याय 14

प्रायिकता

बहुविकल्प प्रश्न - 1, अंक (1), अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न - 3, अंक (3) कुल अंक = 4

❖ प्रायिकता: किसी घटना के घटित होने की संभावना का संख्यात्मक रूप प्रायिकता होता है।

सैद्धान्तिक प्रायिकता का सूत्र

$$\text{प्रायिकता} = \frac{\text{घटना के अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल संभावित परिणाम}}$$ (माना प्रयोग के परिणाम समप्रायिक है।)

❖ यादृच्छया उछाल:- जब किसी सिक्के को बिना किसी पक्षपात या रूकावट के स्वतंत्रतापूर्वक गिरने दिया जाता है।

❖ समप्रायिक:- जब किसी यादृच्छया प्रयोग में किसी घटना के सभी परिणामों के प्राप्त होने की सम्भावना/समान होती है। ये परिणाम समप्रायिक कहलाते है।

❖ प्रारम्भिक घटना:- किसी प्रयोग की वह घटना जिसका केवल एक ही परिणाम हो। प्रारंभिक घटना कहलाती है।

❖ असम्भव घटना:- ऐसी घटना जिसका घटित होना असम्भव हो।

❖ निश्चित घटना:- ऐसी घटना जिसका घटित होना निश्चित है।

❖ पूरक घटनाएँ:- यदि 'E' किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता है तथा '$\bar{E}$' नहीं न घटित होने की प्रायिकता है तब E और $\bar{E}$ पूरक घटनाएँ कहलाती है । अत: $P(E)+P(\bar{E})=1\mp$

$\Rightarrow P(E)=1-P(\bar{E})$

❖ किसी प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं का योग 1 होता है।

❖ एक निश्चित या निर्धारित घटना की प्रायिकता 1 होती है।

❖ एक असम्भव घटना की प्रायिकता 0 होती हे।

❖ सभी प्रायिकताओं का मान शून्य या शून्य से अधिक और 1 या 1 से कम होता है।

अर्थात् $O \le P(E) \le 1$

(A) सिक्के से सम्बन्धित :-

चित्त (H) और पट (T) कुल परिणाम - 2^n

(i) जब एक सिक्का हो -

कुल परिणाम = 2^1 =2 [H,T]

(ii) जब दो सिक्के हो या एक ही सिक्के को दो बार उछाले-

कुल परिणाम = 2^2 = 4 [HH, TH, HT, TT]

(iii) जब तीन सिक्के हो या एक ही सिक्के को तीन बार उछाले-

कूल परिणाम = 2^3 = 8 [HHH, HHt, HTH, THH, TTT, TTH, THT, HTT]

(B) पासे से सम्बन्धित:- पासे के फलकों पर अंकित अंक 1,2, 3, 4, 5, 6 कुल परिणाम = 6^n

(i) जब एक पासा हो -

कुल परिणाम= 6^1 = 6 [1,2,3,4,5,6]

(ii) जब दो पासें हो या एक ही पासें को दो बार फेंकें -

कुल परिणाम= 6^2 =36 [(1,1)(1,2).....(1,6) (6,1) (6,2) ......(6,6)]

(C) ताश के पत्तों से सम्बन्धित :- कुल पत्ते - 52

पान (hearls)	ईंट(diamonds)	हुकुम(Spades)	चिड़ी (Clubs)
13	13	13	13

लाल रंग(26) काला रंग(26)

प्रत्येक प्रकार में - A (इक्का)2,3,4,5,6,7,8,9,10, गुलाम, बेगम, बादशाह

❖ प्रत्येक प्रकार में तस्वीर/फेस/मुख/फोटो वाले पत्ते '3' होते है।

❖ कुल फेस कार्ड होते है-12

❖ बिना तस्वीर वाले पत्ते - 40

❖ कुल रानी वाले पत्ते - 4

❖ कुल राजा वाले पत्ते -4

❖ कुल गुलाम के पत्ते-4

❖ कुल इक्कों की संख्या - 4

(D) वार (day) से सम्बन्धित

अलीप वर्ष/सामान्य वर्ष में दिन -365

लीप वर्ष /अधि वर्ष में दिन- 366

(i) अलीप वर्ष हो 52 रविवार आने की प्रायिकता

365 दिन में 52 सप्ताह, 1 दिन शेष रहता है 52 सप्ताह में 52 रविवार आ चुके हैं अर्थात् 1 दिन में अब रविवार नहीं आ सकता। अन्य वार (सोम, मंगल, बुध, गुरू, शुक्र, शनि)= 6

में से आ सकते है। अर्थात् अनुकूल परिणाम =6

प्रायिकता= $\frac{6}{7}$

❖ लीप वर्ष में 52/53 रविवार आने की प्रायिकता भी ज्ञात की जा सकती है।

(E) गेंद/कंचे/पेन से सम्बन्धित:- सभी Items का योग करना है। उसके बाद अनुकूल परिणाम ज्ञात करके प्रायिकता ज्ञात कर सकते है।

◈ बहुविकल्प प्रश्न:-

प्र. 1. जब एक सिक्के को एक बार उछाला जाता है। तो एक चित प्राप्त करने के प्रायिकता होता है?

(अ) $\frac{1}{4}$ (ब) $\frac{1}{2}$

(स) 1 (द) $\frac{1}{3}$ (ब)

हल: $\frac{1}{2}$

प्र. 2. एक सिक्के को दो बार उछाला जाता है। कम से कम एक चित्त आने की प्रायिकता है?

(अ) $\frac{3}{4}$ (ब) $\frac{1}{4}$

(स) $\frac{1}{3}$ (द) $\frac{1}{2}$ (अ)

हल: एक सिक्के को दो बार उछालने पर कुल परिणाम=4

$[HH, HT, TH, TT]$

कम से कम एक चित्त आने के अनुकूल परिणाम $= 3[HH, HT, TH]$

अत: प्रायिकता $= \frac{\text{घटना के अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल संभावित परिणाम}} = \frac{3}{4}$

प्र. 3. निश्चित घटना की प्रायिकता होती है-

(अ) 0 (ब) 1

(स) $\frac{1}{2}$ (द) $\frac{3}{4}$ (ब)

प्र. 4. निम्न में से प्रायिकता नहीं सकती है?

(अ) $\frac{2}{3}$ (ब) -1

(स) 50% (द) 0.7 (ब)

प्र. 5. एक बच्चे का जन्म होता है। वह लड़का होने की प्रायिकता क्या होगी?

(अ) $\frac{1}{3}$ (ब) $\frac{2}{1}$

(स) $\frac{1}{2}$ (द) $\frac{2}{3}$ (स)

प्र. 6. एक ड्राइवर कार चलाने का प्रयत्न करता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि कार चलना प्रारम्भ नहीं होती है-

(अ) 1 (ब) 0.5

(स) 0 (द) 0.2 (स)

प्र. 7. एक पासे को एक बार फेंका जाता है। अभाज्य संख्या को प्राप्त करने की प्रायिकता है-

(अ) $\frac{1}{2}$ (ब) $\frac{2}{3}$

(स) 0 (द) 1 (अ)

हल: एक पासे को एक बार फेंकने पर कुल परिणाम=6

(1,2,3,4,5,6,)

अभाज्य संख्या प्राप्त होने के अनुकूल परिणाम =3(2,3,5,)

अत: प्रायिकता $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

प्र. 8. यदि किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता 0.7 है तो घटना के घटित नहीं होने की प्रायिकता है-?

(अ) 0.03 (ब) 0.3

(स) 0.003 (द) 3.0 (ब)

◈ अति लघुरात्मक प्रश्न-

प्र. 1. दो खिलाड़ी संगीता और रेशमा टेनिस का एक मैच खेलते हैं। संगीता द्वारा मैंच जीतने की प्रायिकता 0.62 है। रेशमा के जीतने की प्रायिकता क्या है?

हल: संगीता के जीतने की प्रायिकता = P(S)=0.62 (दिया है)

रेशमा के जीतने की प्रायिकता = P (R)=?

P (S) + P(R) = 1 [Rऔर S पूरक घटनाएँ है]

P (R) = 1- P(S)= 1- 0.62=0.38

प्र. 2. एक सिक्के को तीन बार उछाला जाता है सिक्के पर तीन चित्त या तीन पट प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: सिक्के की तीन उछाल पर प्राप्त सभी परिणाम =8[HHH, HHT, HTH, THH, TTT, TTH, THT, HTT]

सिक्के पर तीन चित्त या तीन पट आने के अनुकूल परिणाम = 2 [HHH,TTT]

प्रायिकता $= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

प्र. 3. एक पासे को दो बार फेंका जाता है '5' कम से कम एक बार आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः पासे को दो बार फेंकने पर कुल संभावित परिणाम=36

5 कम से कम एक बार आने के अनुकूल परिणाम = 11 [(5,1)(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)(5,6)(1,5)(2,5)(3,5)(4,5)(6,5)]

प्रायिकता $= \frac{11}{36}$

प्र. 4. अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। इसकी प्रायिकता निकला गया पता ।

(i) एक इक्का होगा

(ii) लाल रंग की बेगम

(iii) तस्वीर वाले पत्तें नहीं

(iv) दहला

हलः कुल पत्तों की संख्या =52

(i) एक इक्का होने के अनुकूल परिणाम=4

एक इक्का होने की प्रायिकता $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) लाल रंग की बेगम होने के अनुकूल परिणाम=2

लाल रंग की बेगम की प्रायिकता $= \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

(iii) तस्वीर वाले पत्ते नहीं होने की अनु.परिणाम=52-12=40

तस्वीर वाले पत्ते नहीं होने की प्रायिकता $= \frac{40}{52} = \frac{10}{13}$

(iv) दहला होने के अनुकूल परिणाम=4

दहला होने की प्रायिकता $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

प्र. 5. एक थैलें में 5 सफेद व 2 लाल गेंदें है इस थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाली गई गेंद होगी-

(i) सफेद (ii) लाल

हलः कुल गेंद =5+2=7

(i) सफेद गेंद होने की प्रायिकता $= \frac{5}{7}$

(ii) लाल गेंद होने की प्रायिकता $= \frac{2}{7}$

प्र. 6. किसी कारण 12 खराब पेन 132 अच्छे पेनों में मिल गए हैं। केवल देखकर यह नहीं बताया जा सकता है कि कोई पेन खराब है या अच्छा है। इस मिश्रण में से, एक पेन यादृच्छया निकाला जाता है। निकाले गए पेन की अच्छा होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः खराब पेनों की संख्या=12

अच्छे पेनों की संख्या= 132

पेनों की कुल संख्या=12 +132=144

अच्छा पेन प्राप्त होने की प्रायिकता= $= \frac{132}{144} = \frac{11}{12}$

प्र. 7. यदि $P(A) = \frac{13}{20}$ है तो "A नहीं" प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः $\because P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{13}{20} = \frac{20-13}{20} = \frac{7}{20}$$

◈ अभ्यास प्रश्नः-

प्र. 1. यदि P(E)=0.992 है तो 'E नहीं' की प्रायिकता क्या है?

प्र. 2. सविता और हमीदा दो मित्र हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों (i) के जन्म दिन भिन्न-भिन्न हों?

(ii) का जन्म दिन एक ही हो ? (लीप वर्ष को छोड़ते हुए)

प्र. 3. एक पिग्मी बैंक में 50 पैसे के सौ सिक्के हैं, rs 1 के पचास सिक्के है rs 2 के बीस सिक्के और rs 5 के दस सिक्के है। यदि पिग्मी बैंक को हिलाकर उल्टा करने पर कोई एक सिक्का गिरने के परिणाम समप्रायिक हैं, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गिरा हुआ सिक्का (i) 50 पैसे का होगा? (ii) rs 5 का नहीं होगा।

प्र. 4. अच्छी प्रकार से फंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक इक्का नहीं होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

प्र. 5. अलीप वर्ष में 53 रविवार आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

प्र. 6. दो सिक्के एक साथ उछाले जाते है, अधिक से अधिक दो चित्त आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

प्र. 7. एक बक्से में 7 नीले और 3 सफेद कंचे है। यदि इस बक्से में से एक कंचा यादृच्छया निकाला जाता है, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि यह कंचा ''सफेद'' है?

प्रथम मॉडल पेपर - 2025

समय : 03 घण्टे 15 मिनट **कक्षा - 10 वीं** **विषय - गणित** **पूर्णांक : 80**

परिक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश:-

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
2. सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है।
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर पुस्तिका में ही लिखें।
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड है, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।
5. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।

खण्ड -अ

◈ **बहुविकल्प प्रश्न-**

1. निम्न वस्तुनिष्ट प्रश्नों के उत्तर का सही विकल्प चयन कर उत्तर पुस्तिका में लिखिए - [1×18=18]

(i) प्रायिकता का अधिकतम मान होता है -
(1) 0 (2) 1
(3) 2 (4) अनन्त (2)

(ii) प्रथम 5 विषम संख्याओं का माध्य है -
(1) 2 (2) 3
(3) 5 (4) 7 (3)

(iii) यदि $\sin\theta = \cos\theta$ हो तो θ का मान होगा -
(1) 45^0 (2) 90^0
(3) 60^0 (4) 0^0 (1)

(iv) $2\sqrt{3}$ एक -
(1) पूर्णांक है (2) परिमेय संख्या है
(3) अपरिमेय संख्या है। (4) एक पूर्ण संख्या है (3)

(v) बहुपद $f(x)=x^2-15$ शून्यांको का गुणनफल होगा -
(1) 3 (2) -15
(3) + 15 (4) 1 (2)

(vi) बिन्दु Q(-4,-5) की x - अक्ष से दूरी है-
(1) 16 (2) + 7
(3) 25 (4) 5 (4)

(vii) आंकड़ो 5,7,0,3,4,8,2 का माध्यक है-
(1) 4 (2) 3
(3) 7 (4) 0 (1)

(viii) 5 मीटर ऊँचे एक वृक्ष की छाया $5\sqrt{3}$ मीटर पर बने तो सूर्य का उन्नतांश कोण है-
(1) 90^0 (2) 60^0
(3) 45^0 (4) 30^0 (4)

(ix) युग्म (a, b) व (-a, -b) की मध्य दूरी होगी -
(1) 2(a+b) (2) 0
(3) a^2-b^2 (4) $2\sqrt{(a^2+b^2)}$ (4)

(x) समांतर श्रेढ़ी -5,-1,3,7 .... का सार्व अंतर है-
(1) 4 (2) -4
(3) 2 (4) -3 (1)

(xi) सभी त्रिभुज समरूप होते है-
(1) समद्विबाहु (2) समबाहु
(3) समकोण (4) विषमबाहु (2)

(xii) समकोण ΔABC में 15 cotA=8 हो तो sin A का मान होगा-
(1) $\frac{8}{15}$ (2) $\frac{15}{17}$
(3) $\frac{8}{17}$ (4) 1 (2)

(xiii) समान्तर श्रेढ़ी 3,8,13,18......... का कौनसा पद 78 है-
(1) 15 (2) 16
(3) 17 (4) 12 (2)

(xiv) वृत्त की वह जीवा जिसकी लम्बाई त्रिज्या से दो गुनी होती है कहलाती है-
(1) परिधि (2) क्षेत्रफल
(3) व्यास (4) त्रिज्या खण्ड (3)

(xv) एक वृत पर कुल स्पर्श रेखाएं खींची जा सकती है-

(1) चार (2) पाँच

(3) एक (4) अनंत (4)

(xvi) प्रथम चार विषम संख्याओं का माध्य है-

(1) 4 (2) 5

(3) 7 (4) 6 (1)

(xvii) एक ठोस अर्द्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल है-

(1) $2\pi r^2$ (2) $4\pi r^2$

(3) $3\pi r^2$ (4) $\frac{2}{3}\pi r^2$ (3)

(xviii) निश्चित घटना की प्रायिकता होती है-

(1) 1 (2) 0

(3) ∞ (4) $\frac{1}{2}$ (1)

◈ रिक्त स्थान प्रश्न -

2. निम्नलिखित प्रश्नों में रिक्त स्थानों की पूर्ति करते हुए उत्तर पुस्तिका में लिखिये- [1×6=6]

(i) एक पासे को उछाले जाने पर सम संख्या आने की प्रायिकता .... होती है। $\left(\frac{1}{2}\right)$

(ii) वर्ग अन्तराल 20-35 का वर्ग चिह्न .... होता है। (27.5)

(iii) एक शंकु का आयतन बेलन के आयतन का .... होता है। $\left(\frac{1}{3}\right)$

(iv) समान्तर श्रेढ़ी 5,2,-1,-4,................ का 10 वा पद .... है। (-22)

(v) वृत्त की स्पर्श रेखा व त्रिज्या के मध्य .... का कोण होता है। (90^0)

(vi) यदि 9,4,7, x का समान्तर माध्य 8 हो तो x का मान .... होगा। (12)

3. अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न - [1×12=12]

(i) 5 लाल, 7 नीली व 8 सफेद गेदों में भरे थेले में से 1 गेंदे निकालने पर लाल रंग की गेंद आने की प्रायिकता होगी।

उत्तर लाल रंग की गेंद आने की प्रायिकता = $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

(ii) A, B, C, D का गणितीय माध्य होगा-

उत्तर माध्य = $\frac{A+B+C+D}{4}$

(iii) यदि $\sin 3x = 1$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर $\sin 3x = 1 = \sin 90^0$

$3x = 90^0$

अत: $x = \frac{90}{3} = 30^0$

(iv) यदि किसी खम्भे की परछाई उसकी लम्बाई के तुल्य हो तो सूर्य का उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए ।

उत्तर $\tan\theta = \frac{h}{h} = 1$

अत: $\theta = 45^0$

(v) एक घड़ी की मिनट की सूई द्वारा 10 मिनट में केन्द्र पर अन्तरित कोण का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर मिनट की सूई द्वारा 10 मिनट में केन्द्र पर अंतरित कोण =

$\frac{360}{60} \times 10 = 60^0$

(vi) किसी घन का आयतन 64 सेमी^{3} है इसके एक फलक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर भुजा = $(\text{आयतन})^{\frac{1}{3}} = (64)^{\frac{1}{3}}$

= 4

फलक का क्षेत्रफल = भुजा^{2} = $(4)^2$

= 16 वर्ग सेमी.

(vii) किसी शंकु की तिर्यक लम्बाई 5 सेमी तथा ऊँचाई 4 सेमी हो तो उसका व्यास ज्ञात कीजिए।

उत्तर त्रिज्या $r = \sqrt{(5)^2 - (4)^2}$

$= \sqrt{25-16} = \sqrt{9}$

= 3 cm

अंत: व्यास = 6cm

(viii) बिन्दु A (3,5) व बिन्दु B(7,9) के मध्य बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए-

उत्तर मध्य बिन्दु

$$x = \frac{3+7}{2} = 5$$

$$y = \frac{5+9}{2} = 7$$

अत: (5, 7)

(ix) SSS समरूपता नियम लिखिए।

उत्तर दो त्रिभुजों में संगत भुजाएं समानुपाती और संगत कोण बराबर हो तो वे समरूप होते है।

(x) समीकरण $2x$-5y-13=0 हो तो x को y के रूप में व्यक्त कीजिए।

उत्तर $2x - 5y - 13 = 0$

$2x = 5y + 13$

अत: $x = \frac{5y+13}{2}$

(xi) बहुपद $P(x) = x^2 - 2x - 8$ के शून्यांक ज्ञात कीजिए।

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$x^2 - 4x + 2x - 8 = 0$

$x(x - 4) + 2(x - 4) = 0$

$(x - 4)(x + 2) = 0$

अर्थात $x = 4$ या - 2

अत: शून्यांक = 4 या - 2

(xii) $\sqrt{2}$ व $\sqrt{3}$ के मध्य एक परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर $\sqrt{2} = 1.414$ अत: इनके मध्य 1.5 होगा।

$\sqrt{3} = 1.732$ अर्थात $\sqrt{2} < 1.5 < \sqrt{3}$

खण्ड -ब

◈ लघुत्तरात्मक प्रश्न - [2×10=20]

4. दर्शाइए कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर माना $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है अत: $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ अर्थात $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$ चूंकि यहाँ 3, a व b पूर्णांक है अत: $\frac{a}{3b}$ एक परिमेय संख्या होगी तथा $\sqrt{2}$ भी परिमेय संख्या होगी परन्तु यथार्थ में $\sqrt{2}$ अपरिमेय है अत: $3\sqrt{2}$ भी अपरिमेय संख्या है।

5. यदि बहुपद $f(x) = x^2 - 8x + K$ के शून्यांको के वर्गो का योग 40 है तो K का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर $f(x) = x^2 - 8x + K$ यदि शून्यांक α व β हो तो

$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 8$ तथा $\alpha\beta = \frac{c}{a} = K$

प्रश्नानुसार $\alpha^2 + \beta^2 = 40$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 40$$

$$2K = 64 - 40 = 24$$

$$K = \frac{24}{2} = 12$$

6. सिद्ध कीजिए की रैखिक समीकरण युग्म $\frac{4}{3}x + 2y - 8 = 0$ व $2x + 3y = 12$ द्वारा निरूपित रेखाएँ सम्पाती होंगी।

उत्तर $\frac{4}{3}x + 2y - 8 = 0$ व $2x + 3y - 12 = 0$

यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}$

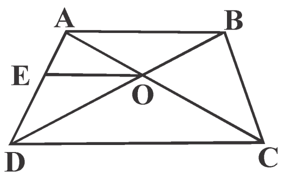
$\frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{3}$ व $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-8}{-12} = \frac{2}{3}$

अर्थात $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{2}{3}$

अत: रेखाएँ परस्पर संपाती होगी।

7. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते है कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है दर्शाइए कि ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है।

उत्तर



दिया है - विकर्ण AC व BD परस्पर

बिन्दु O पर प्रतिच्छेद

करते है जहाँ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ .... (1)

सिद्ध करना है - ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है।

रचना EO || AB खींची जो AD को E पर मिलती है।

उपपति - ΔDAB में EO || AB

अत: $\frac{DE}{EA} = \frac{DO}{OB}$ परंतु $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

या $\frac{DO}{OB} = \frac{CO}{AO}$

अत: $\frac{DE}{EA} = \frac{CO}{AO}$

अर्थात EO || DC || AB

अत: AB || DC

स्पष्ट है कि ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है।

8. y का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु P(2,-3) और Q(10, y) के बीच की दूरी 10 मात्रक है।

उत्तर P(2,-3) व (10,y) प्रश्नानुसार मध्य दूरी

$PQ = \sqrt{(10-2)^2 + (y+3)^2} = 10$

$\Rightarrow 64 + y^2 + 6y + 9 = 100$

$\Rightarrow y^2 + 6y - 27 = 0$

$\Rightarrow y^2 + 9y - 3y - 27 = 0$

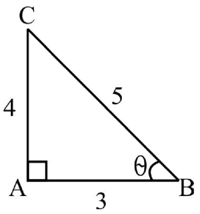
$\Rightarrow y(y+9) - 3(y+9) = 0$

$\Rightarrow (y+9)(y-3) = 0$

अत: y = -9 या 3

9. यदि $\sin\theta = \frac{4}{5}$ हो तो $(\tan\theta + \sec\theta)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर



$\sin\theta = \frac{4}{5}$

$AB = \sqrt{(5)^2 - (4)^2}$

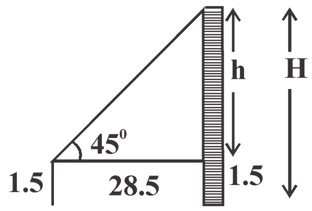
$= 3$

अत: $(\tan\theta + \sec\theta)^2$

$= \left(\frac{4}{3} + \frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{9}{3}\right)^2 = 9$

10. 1.5 मी. लम्बा एक प्रेक्षक एक चिमनी से 28.5 मी. की दूरी पर है। उसकी आँखों से चिमनी के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। चिमनी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर माना चिमनी की ऊँचाई H है।



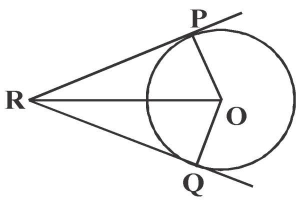
$\tan 45^0 = \frac{h}{28.5} = 1$

$h = 28.5m$

अत: H = h + 28.5 = 1.5 + 28.5 = 30 मीटर

11. सिद्ध कीजिए कि एक बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती है।

उत्तर



दिया है- केन्द्र O वाले वृत्त के बाह्य बिन्दु R से स्पर्श रेखाएँ PR व QR खींची गई है।

रचना .... OP, OQ, OR को मिलाया।

सिद्ध करना है- RP = RQ

उपपत्ति - ΔOPR व ΔOQR से -

$\angle OPR = \angle OQR = 90^0$ (प्रत्येक कोण 90^0)

OR = OR (उभयनिष्ठ भुजा)

OP = OQ (त्रिज्याएं)

R.H.S. सर्वांगसमता नियम से

अतः $\Delta OPR \cong \Delta OQR$

इसलिए RP = RQ इति सिद्धम्

12. एक वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी है तथा एक चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण 60° है। इस त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर त्रिज्या r = 7 सेमी

$\theta = 60^0$

त्रिज्या खण्ड क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \theta}{360}$

$= \frac{22}{7} \times \frac{(7)^2 \times 60}{360}$

$= \frac{11 \times 7}{3} = \frac{77}{3} = 25.67$ वर्ग सेमी

13. दो गोलों के आयतनों का अनुपात 64 : 27 है तो उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात है।

हल - माना दोनों गोलों की त्रिज्याएं r_1 व r_2 है अतः इन आयतनों का अनुपात 64 : 27 है।

प्रश्नानुसार $\frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} = \frac{64}{27} \Rightarrow \frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{64}{27} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{3}$

अतः पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात

$\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$

अतः अभिष्ठ अनुपात = 16 : 9

खण्ड -स

◈ दीर्घउत्तरीय प्रश्न- [3×4=12]

14. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन किसी मोहल्ले के 68 उपभोक्ताओं की बिजली की मासिक खपत दर्शाता है। इन आंकड़ो का माध्यक ज्ञात कीजिए।

उत्तर

मासिक खपत (इकाइयों में)	उपभोक्ताओं की संख्या
65-85	4
85-105	5
105-125	13
125-145	20
145-165	14
165-185	8
185-205	4

अथवा

दैनिक मजदूरी (रुपये में)	500-520	520-540	540-560	560-580	580-600
श्रमिकों की संख्या	12	14	8	6	10

कल्पित माध्य विधि से श्रमिको की माध्य दैनिक मजदूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर

मासिक खपत	उपभोक्ताओं की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता (cf)
65-85	4	4
85-105	5	9
105-125	13	22
125-145	20	42
145-165	14	56
165-185	8	64
185-205	4	68
योग	N = 68	

यहाँ N = 68 तो $\frac{N}{2} = \frac{68}{2} = 34$ से ठी बड़ी cf = 42

अतः माध्यक वर्ग 125-145 यहाँ l = 125, f = 20, c = 22, h = 20

माध्यक $M = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - c}{f}\right) \times h$

$= 125 + \left(\frac{34 - 22}{20}\right) \times 20 = 125 + \frac{12}{20} \times 20$

$= 137$

अथवा

दैनिक मजदूरी (रुपयों में)	श्रमिकों की संख्या (f)	वर्ग चिह्न x	माना a= 550 d=x-a	fd
500-520	12	510	-40	-480
520-540	14	530	-20	-280
540-560	8	550	0	0
560-580	6	570	20	120
580-600	10	590	40	400
योग	$\sum f = 50$			$\sum fd = -240$

स. माध्य $\bar{x} = a + \frac{\sum fd}{\sum f}$

$= 550 + \left(\frac{-240}{50}\right)$

550-4.8

$= 545.2$

15. n के किस मान के लिए, दोनों समान्तर श्रेणियों 63, 65, 67....... और 3, 10, 17, ... के n वें पद एक समान होगें?

अथवा

2 और 101 के मध्य 5 से विभाजित होने वाली सभी प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर 63, 65, 67 .... n वां पद

$a_n = a + (n-1)d = 63+(n-1)\times 2$ .... (1)

3, 10, 17, ... n वां पद

$a'_n = 3 + (n-1)\times(7)$ ....(2)

प्रश्नानुसार

$a_n = a'_n$

$63 + (n-1)\times 2 = 3+(n-1)\times(7)$

$63 + 2n - 2 = 3 + 7n - 7$

$2n - 7n = - 61-4$

$- 5n = - 65$

$n = \frac{-65}{-5} = 13$ वां पद

अथवा

2 व 105 के मध्य 5 से विभाजित प्राकृत संख्याएँ-

5,10,15,20, ... 100

यदि 100, n वां पद होतो - $a_n = a + (n-1)d$

$100 = 5 + (n - 1) \times 5$

$100 = 5 + 5n - 5$

$5n = 100$ या $n = \frac{100}{5} = 20$ वां पद

अत: 20 पदों का योग $S_n = \frac{N}{2}[a + a_n]$

$= \frac{20}{2}[5+100] = 10\times 105$

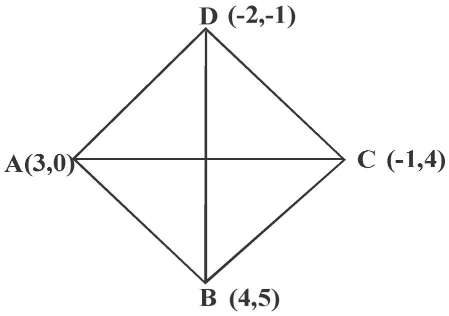
$= 1050$

16. एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष इस क्रम में (3,0), (4,5),(-1,4) और (-2,-1) है।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (2,-2), (-2,1) तथा (5,2) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष है।

उत्तर



माना ABCD एक समचतुर्भुज है।

विकर्ण AC $= \sqrt{(-1-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{16+16}$

$= 4\sqrt{2}$ मात्रक

विकर्ण BD $= \sqrt{(-2-4)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{36+36}$

$= 6\sqrt{2}$ मात्रक

समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}($ विकर्णो का गुणफलन $)$

$= \frac{1}{2}\times\left(4\sqrt{2}\right)\times\left(6\sqrt{2}\right)$

$= 24$ वर्ग मात्रक

अथवा

यहाँ दूरी $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$

अत: ΔABC के लिए यदि A(2,-2), B(-2,1) व C(5,2) हो तो -

$(AB)^2=(-2-2)^2+(1+2)^2=(-4)^2+(3)^2=16+9=25$

$(BC)^2=(5+2)^2+(2-1)^2=(7)^2+(1)^2=49+1=50$

$(CA)^2=(2-5)^2+(-2-2)^2=(-3)^2+(-4)^2=9+16=25$

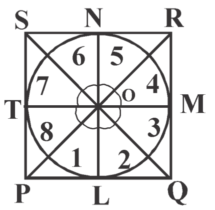
अर्थात $(AB)^2+(CA)^2=(BC)^2$ अत: ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।

17. सिद्ध कीजिए की वृत्त के परिगत बने चतुर्भुज के आमने-सामने की भुजाएँ केन्द्र पर सम्पुरक कोण अंतरित करती है।

अथवा

सिद्ध कीजिए की किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण का सम्पूरक होता है।

उत्तर



दिया है - O केन्द्र वाले वृत्त के PQRS एक परिगत चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है-

$\angle POQ + \angle SOR = 180^0$

$\angle SOP + \angle ROQ = 180^0$

रचना - केन्द्र O से विभिन्न बिन्दुओं का मिलाया।

उपपति - यहाँ $\angle 2 = \angle 3, \angle 4 = \angle 5, \angle 6 = \angle 7, \angle 8 = \angle 1$

केन्द्र पर बने सभी कोणों का योग = 360^0

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360^0$

$2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6) = 360^0$

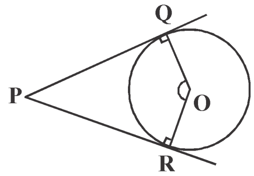
$(\angle 1 + \angle 2) + (\angle 5 + \angle 6) = \frac{360}{2} = 180^0$

अर्थात् $\angle POQ + \angle SOR = 180^0$

इसी प्रकार $\angle SOP + \angle ROQ = 180^0$ इति सिद्धम्

अथवा

हल.



दिया है:- एक वृत जिसका केन्द्र O है तथा PQ तथा PR वृत पर स्पर्श रेखाऐं हैं।

सिद्ध करना है:- $\angle ROQ + \angle QPR = 180$

उपपति:- वृत में OQ त्रिज्या है तथा PQ स्पर्श रेखा है

$\therefore \angle OQP = 90^0$ (स्पर्श रेखा त्रिज्या पर लम्बवत होती है।)

इसी प्रकार

$\angle ORP = 90^0$

चतुर्भुज PQOR में,

$\angle RPQ + \angle QOR + \angle OQP + \angle ORP = 360^0$

$\angle RPQ + \angle QOR + 90^0 + 90^0 = 360^0$

$\angle RPQ + \angle QOR + 180^0 = 360^0$

$\angle RPQ + \angle QOR = 360^0 - 180^0$

$\angle RPQ + \angle QOR = 180^0$

$\angle ROQ + \angle QPR = 180^0$

अत: $\angle ROQ + \angle QPR = 180^0$

खण्ड -द

◈ **निबंधात्मक प्रश्न-** **[4×3=12]**

18. निम्न आँकड़े किसी विद्यालय में कक्षा X के 100 छात्रों की एक विशेष सत्र में दिये गये है। इस बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए।

अंक	छात्रों की संख्या
10 से कम	7
20 से कम	21
30 से कम	34
40 से कम	46
50 से कम	66
60 से कम	77
70 से कम	92
80 से कम	100

अथवा

निम्नलिखित आँकड़ो की माध्यिका 526 है। यदि बारम्बारताओं का योग 100 है तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	बारम्बारता
0-100	2
100-200	5
200-300	x
300-400	12
400-500	17
500-600	20
600-700	y
700-800	9
800-900	7
900-1000	4

उत्तर सही वर्गीकृत सारणी

अंक	छात्रों की संख्या
0-10	7
10-20	21-7=14
20-30	34-21=13
30-40	46-34=12 (f_0)
40-50	66-46=20 (f_1) बहुलक वर्ग
50-60	77-66=11 (f_2)
60-70	92-77=15
70-80	100-92=08

यहाँ $l = 40, f_0 = 12, f_1=20, f_2 = 11, h = 10$

बहुलक $Z = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$$= 40 + \left(\frac{20-12}{2\times 20-12-11}\right)\times 10$$

$$= 40 + \frac{8}{17}\times 10 = 40 + 4.7 = 44.7$$

अथवा

हल :

वर्ग	बारम्बारता (f)	(cf)
0-100	2	2
100-200	5	7
200-300	x	7+x
300-400	12	19+x
400-500	17	36+x
500-600	20	56+x
600-700	y	56+x+y
700-800	9	65+x+y
800-900	7	72+x+y
900-1000	4	76+x+y

N=100

प्रश्नानुसार माध्यक M = 525 तथा

$N = 76+x+y = 100$

$x + y = 100-76$

$x + y = 24$ ....(1)

माध्यक $M = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - c\right)}{f} \times h$

$$525 = 500 + \left(\frac{50-36-x}{20}\right)\times 100$$

$$525 = 500 + \left(\frac{14-x}{20}\right)\times 100$$

$\frac{25}{5} = 14 - x$ या $x = 14-5=09$

समी. (1) से $Y = 24-x=24-9 = 15$

19. 2x+3y=11 और 2x-4y=-24 को हल कीजिए और इसमें 'm' का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए y = mn + 3 हो।

अथवा

पाँच वर्ष पूर्व नूरी की आयु सोनू की आयु से तीन गुनी थी, दस वर्ष पश्चात नूरी की आयु सोनू की आयु की दो गुनी हो जाएगी। नूरी व सोनु की आयु कितनी है।

उत्तर $2x + 3y = 11$

अत: $x = \frac{11-3y}{2}$ .... (1)

तथा $2x - 4y = -24$

अत: $2\left(\frac{11-3y}{2}\right) - 4y = -24$

$-7y = -24-11 = -35$

$y = \frac{-35}{-7} = 5$

समी. (1) में मान रखने पर $x = \frac{11-3\times 5}{2} = \frac{11-15}{2}$

$= \frac{-4}{2}$ -2

x व y का मान रखने पर y = mn + 3

5= m (-2)+3

-2m = 5-3=2

$m = \frac{2}{-2} = -1$

अथवा

माना नूरी की वर्तमान आयु = x वर्ष

सोनू की वर्तमान आयु = y वर्ष

5 वर्ष पूर्व की शर्त-

(x-5) = 3(y-5)

x - 3y = -10 .... (1)

10 वर्ष पश्चात - x + 10 = 2 (y +10)

x - 2y = 10 .... (2)

समी. (1) में से (2) को घटाने पर

$x - 3y = -10$

$\underline{_{-}x \;\; {}_{+}2y = {}_{-}10}$

- y = - 20 अर्थात y = 20 वर्ष

समी. (2) से

x - 2 × 20 = 10

x = 50 वर्ष

अत: नूरी की आयु = 50 वर्ष

सोनू की आयु = 20 वर्ष

20. **सिद्ध कीजिए कि** - $\mathbf{\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A}$

अथवा

सिद्ध कीजिए कि -

$$\mathbf{\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan} = 1 + \sec\theta\text{cosec}\theta}$$

उत्तर $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos} = 2\sec A$

L.H.S

$$\frac{\cos^2 A + (1+\sin A)^2}{(1+\sin A)\cos A} = \frac{\cos^2 A + \sin^2 A + 2\sin A + 1}{(1+\sin A)\cos A}$$

$$= \frac{1 + 2\sin A + 1}{(1+\sin A)\cos A} = \frac{2 + 2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$$

$$= \frac{2(1+\sin A)}{(1+\sin A)\cos A} = 2\sec A = RHS$$

अथवा

$$\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\text{cosec}\theta$$

L.H.S.

$$\frac{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{\left(1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)} + \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\left(1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin^3\theta - \cos^3\theta}{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1+\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

= 1+ secθcosecθ

= RHS इति सिद्धम्

❖❖❖

द्वितीय मॉडल पेपर - 2025

समय : 03 घण्टे 15 मिनट | **कक्षा - 10 वीं** | **विषय - गणित** | **पूर्णांक : 80**

परिक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देशः-

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
2. सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है।
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर पुस्तिका में ही लिखें।
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड है, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।
5. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।

खण्ड -अ

◈ **बहुविकल्पी प्रश्न-**

1. **निम्न वस्तुनिष्ट प्रश्नों के उत्तर का सही विकल्प चयन कर उत्तर पुस्तिका में लिखिए -** **[1×18=18]**

(i) **किसी श्रेणी का सर्वाधिक बारम्बारता मूल्य कहलाता है-**
(1) माध्य (2) बहुलक
(3) माध्यक (4) इनमें में से कोई नहीं (2)

(ii) **एक वृत्त की परिधि 176 सेमी हो तो उसकी त्रिज्या होगी -**
(1) 28 सेमी (2) 24 सेमी
(3) 22 सेमी (4) 30 सेमी (1)

(iii) **घड़ी की मिनट की सुई द्वारा 1 मिनट में बनाया गया कोण होता है -**
(1) 6^0 (2) 12^0
(3) 9^0 (4) 18^0 (अ)

(iv) **144 व 198 का म.स.प. होगा-**
(1) 6 (2) 12
(3) 9 (4) 18 (4)

(v) **बहुपद P(x)=(x-5)(3+x) की घात है-**
(1) 3 (2) 2
(3) 1 (4) 5 (2)

(vi) **बिन्दु (-3,5) कौन से चतुर्थांस में होगा -**
(1) प्रथम (2) द्वितीय
(3) तृतीय (4) चतुर्थ (2)

(vii) **आंकड़ो 5,7,6,5,6,8,4,5 का बहुलक है-**
(1) 4 (2) 6
(3) 5 (4) 7 (3)

(viii) **एक खम्भे की परछाई की लम्बाई 2मीटर है जबकि सूर्य का उन्नयन कोण 60^0 है तो खम्भे की लम्बाई -**
(1) 2 मीटर (2) $\sqrt{3}$ मीटर
(3) $2\sqrt{3}$ मीटर (4) 4 मीटर (3)

(ix) **बिन्दु (-x,-y) की मूल बिन्दु से दूरी है -**
(1) -x (2) -y
(3) x^2+y^2 (4) $\sqrt{x^2+y^2}$ (4)

(x) **समांतर श्रेढ़ी a, 3a,5a, ... का n वां पद है-**
(1) na (2) a(2n-1)
(3) 2na (4) a(2n+1) (2)

(xi) **सभी वृत होते है-**
(1) समरूप (2) सर्वांगसम
(3) बराबर (4) इनमें से कोई नहीं (1)

(xii) **$\sin A = \frac{4}{5}$ हो तो cos A का मान होगा-**
(1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{5}{3}$
(3) $\frac{4}{5}$ (4) 1 (1)

(xiii) **3 के प्रथम पाँच गुणजों का योगफल है-**
(1) 45 (2) 55
(3) 65 (4) 75 (1)

(xiv) **एक वृत के बाह्य बिन्दु से खींची गई अधिकतम स्पर्श रेखाएँ है-**

(1) एक (2) दो

(3) तीन (4) अनन्त (2)

(xv) वह रेखा जो वृत को दो बिन्दुओं पर काटती है, कहलाती है-

(1) जीवा (2) छेदक रेखा

(3) स्पर्श रेखा (4) इनमें कोई नहीं (2)

(xvi) आंकड़ो 15,12,10,8,13,4,9 में परिसर होगा-

(1) 15 (2) 4

(3) 11 (4) 7 (3)

(xvii) घन के एक पृष्ठ का परिमाप 28 सेमी है तो घन की भुजा है-

(1) 21 सेमी (2) 14 सेमी

(3) 7 सेमी (4) 56 सेमी (3)

(xviii) एक पासे को फेंकने पर 3 का गुणज आने की प्रायिकता है-

(1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{2}{3}$

(3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{3}$ (4)

◈ **रिक्तस्थान प्रश्न- 1×6 = 6**

2. निम्नलिखित प्रश्नों में रिक्त स्थानों की पूर्ति करते हुए पुस्तिका में लिखिए-

(i) किसी असंभव घटना के होने की प्रायिकता .... होती है। (0)

(ii) संचयी बारम्बारता सारणी का उपयोग .... ज्ञात करने में किया जाता है। (माध्यक)

(iii) घन ऐसा घनाभ है जिसके 6 पृष्ठों का क्षेत्रफल .... होते है। (समान)

(iv) यदि a,b,c समान्तर श्रेढ़ी में हो तो b =........... होता है। $\left(b = \frac{a+c}{2}\right)$

(v) वृत्त पर स्थित एक बिन्दु से .... स्पर्श रेखा खींची जा सकती है। (1)

(vi) $\tan 30^0 \tan 60^0$ का मान .... होता है। (1)

◈ **3. अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न - 1×12 = 12**

(i) चाप की त्रिज्या 6 सेमी व कोण 60^0 हो तो त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर $\frac{\pi r^2\theta}{360} = \frac{22}{7} \times \frac{6\times6\times60}{360} = 18.84$ वर्गसेमी

(ii) संख्या 72 और 120 का लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) ज्ञात कीजिए।

उत्तर $72 = 2^3\times3^2$

$120 = 2^3\times3\times5$

अत: LCM = $2^3\times3^3\times5$

$= 360$

(iii) बहुपद x^2+4x+K का एक शून्यक 2 है तो K का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर x = 2 पर

$P(x) = x^2 + 4x + K$

$P(2) = (2)^2 + 4 \times 2 + K$

P(x) का शुन्यक है तो

$P(2) = 0$

$4 + 8 + K = 0$

अत: K = - 12

(iv) 7 पेंसिल तथा 5 पेन का तुल मूल्य 29 रुपये है इसे बिजगणितीय रूप में लिखिए।

उत्तर मान 1 पेंसिल = x रु.

1 पेन = y रु.

अत: $7x + 5y = 29$

(v) दो समरूप त्रिभुज ABC व PQR के परिमाप क्रमशः 36 सेमी व 24 सेमी है यदि PQ = 10 सेमी हो तो AB ज्ञात कीजिए।

उत्तर $\frac{AB}{PQ} = \frac{36}{24}$

$AB = \frac{36}{24} \times PQ$

$= \frac{36}{24} \times 10 = 15cm$

(vi) एक घड़ी के मिनट की सुई जिसकी लम्बाई 14 सेमी है, इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात करो।

उत्तर मिनट की सुई द्वारा 5 मिनट में रचित कोण

$\theta = 5 \times 6^0 = 30^0$

r = 14 सेमी.

इसलिए रचित क्षेत्रफल =

$$\frac{\pi r^2\theta}{360} = \frac{22}{7} \times \frac{14 \times 14 \times 30}{360} = \frac{154}{3}$$ सेमी^{2}.

(vii) एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 100 π वर्ग मीटर है। उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर गोले का क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

त्रिज्या $r = \sqrt{\frac{\text{क्षे.}}{4\pi}} = \sqrt{\frac{100\pi}{4\pi}}$

$= 5$ सेमी

(viii) एक अर्द्ध गोले की त्रिज्या 3.5 सेमी है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए ।

उत्तर अर्द्ध गोले का आयतन

$= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (3.5)^3$

$= 89.83$ घन सेमी.

(ix) निर्देशांक (4 ,3) में भुज और कोटि ज्ञात कीजिए।

उत्तर भुज- 4

कोट - 3

(x) r त्रिज्या वाले वृत्त के एक त्रिज्याखण्ड, जिसका कोण अंशो में θ है का क्षेत्रफल लिखिए।

उत्तर त्रिज्याखण्ड का क्षे. = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

(xi) सूर्य के उन्नयन कोण में वृद्धि (0 से 90°) होने से किसी मीनार की परछाई की लम्बाई में क्या परिवर्तन होगा? लिखिए।

उत्तर कमी होगी ।

(xii) $\frac{\sqrt{1-\sin^2 40^0}}{\cos 40^0}$ का सरलतम मान लिखिए।

उत्तर $\frac{\sqrt{1-\sin^2 40}}{\cos 40^0}$

$= \frac{\cos 40^0}{\cos 40} = 1$

खण्ड - ब

◈ लघुत्तरात्मक प्रश्न - 2×10 =20

4. दो संख्याओं 616 और 32 का महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात कीजिए। [2]

उत्तर $616 = 2^3 \times 7 \times 11$

$32 = 2^5$

अतः HCF $2^3 = 8$

5. द्विघात बहुपद $2x^2-6x+4$ के शून्यांको का योग व गुणनफल ज्ञात कीजिए। [2]

उत्तर $2x^2 - 6x + 4$

में $a = 2, b = -6$ व $c = 4$

योग $\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{(-6)}{2} = 3$

गुणनफल $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$

6. दो संख्याओं का अंतर 26 तथा बड़ी संख्या छोटी संख्या के 3 गुने से 4 अधिक है। संख्याए ज्ञात कीजिए। [2]

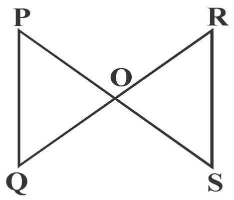
उत्तर माना बड़ी संख्या = x

व छोटी संख्या = y

प्रश्नानुसार $x - y = 26$

तथा $x - 3y = 4$

7. दी गयी आकृति में यदि PQ || RS तो सिद्ध कीजिए की Δ POQ ~ Δ SOR है।



उत्तर PQ || RS

अतः ∠P = ∠S एकांतर

∠Q = ∠R एकांतर

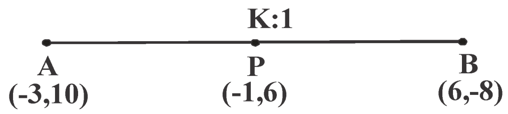
∠POQ = ∠SOR शीर्षाभिमुख

इसलिए Δ POQ ~ Δ SOR

इति सिद्धम्

8. बिन्दुओं (-3,10) और (6,-8) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु (-1,6) किस अनुपात में विभाजित करता है? [2]

उत्तर



चुंकि $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$

$-1 = \frac{6K - 3}{K + 1}$

6K - 3 = - K-1

6K + K = -1+3

7K = 2

$K = \frac{2}{7}$

अर्थात् $K : 1 = \frac{2}{7}$

अत: 2 : 7

9. यदि $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ और $\cos\beta = \frac{1}{2}$ हो तो $(\alpha + \beta)$ का मान ज्ञात किजिए। [2]

उत्तर $\sin\alpha = \frac{1}{2} = \sin 30^0$

अर्थात् $\alpha = 30^0$

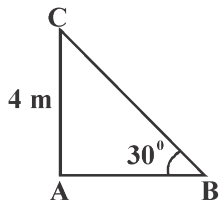
तथा $\cos\beta = \frac{1}{2} = \cos 60^0$

अर्थात् $\beta = 60^0$

अत: $\alpha + \beta = 30 + 60 = 90^0$

10. एक वृक्ष से 4 मीटर की ऊँचाई से टूटकर इस प्रकार गिरता है कि इसका ऊपरी सिरा पृथ्वी से 30° को कोण बनाता है। वृक्ष की कुल ऊँचाई ज्ञात कीजिए। [2]

उत्तर



यदि एक BC पेड़ का टूटा हुआ भाग हो तो

$\sin 30 = \frac{4}{BC}$

अर्थात् $BC = \frac{4}{\sin 30} = \frac{4}{\left(\frac{1}{2}\right)}$

अत: BC = 4 × 2 = 8 मी.

इसलिए पेड़ की लम्बाई = AC + BC

= 4m + 8 m

= 12 m

11. त्रिज्या 4.2 सेमी वाले धातु के एक गोले को पिघलाकर त्रिज्या 6 सेमी. वाले एक बेलन के रूप में ढ़ाला जाता है। तो बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। [2]

उत्तर माना बेलन की ऊँचाई = H

यहाँ गोले की त्रिज्या r = 4.2 cm

बेलन की त्रिज्या R = 6 cm

प्रश्नानुसार

बेलन का आयतन = गोले का आयतन

$\pi R^2 H = \frac{4}{3}\pi r^3$

$H = \frac{4r^3}{3R^2} = \frac{4 \times 4.2 \times 4.2 \times 4.2}{3 \times 6 \times 6}$

$= \frac{42 \times 42 \times 42}{27 \times 1000}$

= 2.74 सेमी.

12. बंटन 1,6,3,5,7,9,11,4,9 का माध्यक तथा बहुलक ज्ञात कीजिए। [2]

उत्तर आरोही क्रम में लिखने पर –

1,3,4,5,6,7,9,9,11 कुल 9 पद अत:

माध्यक $= \left(\frac{9+1}{2}\right)$ = 5वां पद

= 6

यहाँ सर्वाधिक बारम्बारता 9 की है।

अत: बहुलक = 9

13. किसी अलीप वर्ष में 53 रविवार आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। [2]

उत्तर अलीप वर्ष में दिन = 365

अर्थात् $\frac{365}{7} = 52$ सप्ताह व 1 दिन

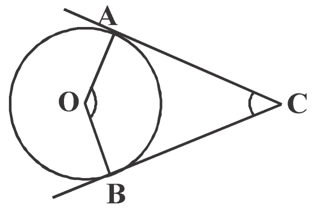
कुल 7 दिवस (सोम, मंगल, बुध, गुरु, शुक्र, शनि, रवि)

में से 1 दिन रविवार आने की प्रायिकता $P = \frac{1}{7}$ होगी

खण्ड-स

◈ दीर्घउत्तरीय प्रश्न - 3×4 = 12

14. दी गई आकृति में O एक वृत्त का केन्द्र है जिसके बाह्य बिन्दु C से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ CA व CB खींची गई है, तो सिद्ध कीजिए AOB व ACB सम्पूरक है।



उत्तर दिया है - वृत के बाहर स्थित बिन्दु C से स्पर्श रेखाएँ CA व CB है।

सिद्ध करना है - $AOB + ACB = 180^0$

उपपति - OA त्रिज्या है और CA बिन्दु C से स्पर्श रेखाएँ है अत:

$\angle OAC = 90^0$

इसी प्रकार $\angle OBC = 90^0$

चतुर्भुज BOAC में -

$\angle BOA + \angle CBO + \angle OAC + \angle ACB = 360^0$

$\angle BOA + 90^0 + 90^0 + \angle ACB = 360^0$

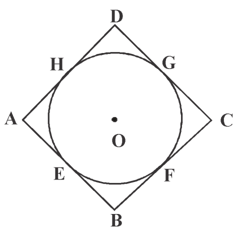
$\angle BOA + \angle ACB = 180^0$

इति सिद्धम्

अथवा

सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत समान्तर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है।

उत्तर



दिया है - एक समान्तर चतुर्भुज ABCD केन्द्र O वाले वृत्त के परिगत है।

सिद्ध करना है- ABCD एक सम चतुर्भुज है।

उपपति -

स्पर्श रेखा प्रमेय से BE = BF .... (1)

इसी प्रकार AE = AH ....(2)

CG = CF .... (3)

DG = DH .... (4)

समी. (1), (2), (3) व (4) को जोड़ने पर -

$(BE + AE) + (CG + DG) = (BE + CF) + (AH + DH)$

AB + CD = BC + AD

चूंकि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है

अत: AB = CD व AD = BC

अत: 2AB = 2BC अर्थात AB = BC

स्पष्ट है AB = BC = CD = AD

अत: ABCD एक समचतुर्भुज है।

इति सिद्धम्

15. दर्शाइये कि बिन्दु (1,7), (4,2),(-1,-1) और (-4,4) एक वर्ग के शीर्ष है।

उत्तर A(1,7), B(4,2),C(-1,-1) तथा D(-4,-4)

वर्ग की भुजाएँ बराबर होती है तथा विकर्ण भी बराबर होते है।

भुजा AB $= \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{34}$

भुजा BC $= \sqrt{(-1-4)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{34}$

भुजा CD $= \sqrt{(-4+1)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{34}$

भुजा DA $= \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{34}$

विकर्ण AC $= \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-7)^2}$

$= \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$

विकर्ण BD $= \sqrt{(-4-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{68}$

स्पष्ट है कि ABCD एक वर्ग है।

अथवा

ज्ञात कीजिए कि रेखा 3x + y = 9 बिन्दुओं (1,3) तथा (2,7) को मिलाने वाली रेखा रेखाखण्ड को किस अनुपात में विभाजित किया जाता है।

उत्तर माना बिन्दु (1,3) तथा (2,7) को मिलाने वाली रेखा रेखाखण्ड $3x+y=9$ को $\lambda:1$ में विभाजित करता है अतः विभाजक बिन्दु के लिए

$$x=\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}=\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}$$

$$y=\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}=\frac{7\lambda+3}{\lambda+1}$$

समी. में मान रखने पर -

$$3\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}\right)+\frac{7\lambda+3}{\lambda+1}=9$$

$(6\lambda+3)+(7\lambda+3)=9\lambda+9$

$4\lambda=3$

$\lambda=\frac{3}{4}$ अर्थात् $\lambda:1=\frac{3}{4}$

अतः 3 : 4

16. ç ŵêeAP के चौथे और 8 वें पदों का योग 24 है तथा छठे और 10 वें पदों का योग 44 है। इस AP के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए।

उत्तर प्रश्नानुसार

$A_4+A_8=24$

$a+3d+a+7d=24$

$2a+10d=24$

$a+5d=12$ ....(1)

$a_6+a_{10}=44$

$a+5d+a+9d=44$

$2a+14d=44$

$a+7d=22$ .... (2)

समी. (1)-(2)

a	+ 5d =	12
a	± 7d =	22
	- 2d =	- 10

$d=5$

समी. 1 से $a+5\times5=12$

$a=-13$

अतः तीन पद -13,-8, -3

अथवा

किसी AP के प्रथम 7 पदों को योग 49 है और प्रथम 17 पदों का योग 289 है तो इसके प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

उत्तर प्रश्नानुसार -

$S_7=49$

$\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]=S_n$

$\frac{7}{2}(2a+6d)=49$

$2a+6d=\frac{49\times2}{7}=14$

$a+3d=7$ .... (1)

इसी तरह से -

$\frac{17}{2}(2a+16d)=289$

$a+8d=17$ .... (2)

समी. (1) व (2) से

a	+ 3d	= 7
-a	± 8d	= -17
	- 5d	= - 10

$d=2$

$a=1$

n पदों का योग

$\frac{n}{2}[2+(n-1)2]$

$=n^2$

17. कल्पित माध्य मानकर निम्न बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए-

वर्गअन्तराल	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
बारम्बारता	2	3	7	5	6	7

उत्तर माना कल्पित माध्य a = 47.5

वर्ग अन्तराल	विद्यार्थियों की संख्या (f)	वर्ग चिह्न (x)	d=x-a	fd
10-25	2	17.5	-30	-60
25-40	3	32.5	-15	-45
40-55	7	47.5	0	0
55-70	5	62.5	15	75

70-85	6	77.5	30	180
85-100	7	92.5	45	315
	योग	$\sum f = 30$		$\sum fd = 465$

स. माध्य $\bar{x} = a + \frac{\sum fd}{\sum f}$

$= 47.5 + \frac{465}{30}$

$= 47.5 + 15.5$

$= 63$

अथवा

निम्न बारम्बारता बटन का माध्य 50 हो तो x व y के मान ज्ञात कीजिए-

वर्गअन्तराल	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	योग
बारम्बारता	17	x	32	y	19	120

उत्तर $\bar{x} = 50$

वर्ग अंतराल	बारम्बारता (f)	माध्य बिन्दु (x)	fx
0-20	17	10	170
20-40	x	30	30x
40-60	32	50	1600
60-80	y	70	70y
80-100	19	90	1710
योग	$\sum f = 120$		$\sum fx = 30x + 70y + 3480$

बारम्बारताओं का योग -

17+x+32+y+19=120

x+y+68 = 120

x+y = 120-68

x+y = 52 ....(1)

स. माध्य

$$50 = \frac{30x + 70y + 3480}{120}$$

30x + 70y = 6000-3480 = 2520

3x + 7y = 252 ....(2)

समी. (1) को 7 से गुणा कर समी. (2)घटाने पर-

$$\begin{aligned} 7x \quad &+ 7y &= 364 \\ -3x \quad &\pm 7y &= -252 \\ 4x & &= 112 \end{aligned}$$

$x = \frac{112}{4} = 28$

समी. (1)से 28+y = 52

Y = 52-28 = 24

अत: x = 28 व y = 24

खण्ड -द

◈ निबंधात्मक प्रश्न - 4×3 = 12

18. सिद्ध कीजिए कि -

$$\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$$

उत्तर LHS= $\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{1+\frac{1}{\cos A}}{\left(\frac{1}{\cos A}\right)}$

$= \frac{1+\cos A}{\cos A} \times \frac{\cos A}{1} = 1+\cos A$

$= (1+\cos A)\left(\frac{1-\cos A}{1-\cos A}\right)$

$= \frac{1-\cos^2 A}{1-\cos A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A} = RHS$

इति सिद्धम

अथवा

सिद्ध कीजिए कि -

$$\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} = \operatorname{cosec} A + \cot A$$

LHS=

$\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} \times \sqrt{\frac{1+\cos A}{1+\cos A}}$

$= \sqrt{\frac{(1+\cos A)^2}{1-\cos^2 A}} = \sqrt{\frac{(1+\cos A)^2}{\sin^2 A}}$

$= \frac{1+\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\sin A} + \frac{\cos A}{\sin A}$

$= \operatorname{cosec}A + \cot A$

= RHS इति सिद्धम

19. क्या परिमाप 80 मी. क्षेत्रफल 400 मी² के एक पार्क को बनाना सम्भव है? यदि है तो उसकी लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर पार्क की ल. = x मी.

पार्क की चौ. = y मी.

प्रश्नानुसार परिमाप $2(x+y) = 80$

$x+y = 40$ ....(1)

क्षे. $xy = 400$ मी² .... (2)

अत: $x(40-x) = 400$

$40x - x^2 - 400 = 0$

$x^2-40x + 400 = 0$ ....(3)

यहाँ $b^2-4ac = (-40)^2-4(1)(400)$

$= 1600 - 1600 = 0$

अत: मूल वास्तविक व बराबर होंगे।

यहाँ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{40 \pm 0}{2}$

= 20 मी.

समी. 1 से $20 + y = 40$

$y = 40 - 20 = 20$ मी.

अर्थात् $x = y$

अत: आयताकार पार्क का अस्तित्व सम्भव है और यह एक वर्ग है।

अथवा

एक त्रिभुज की दो भुजाएं x सेमी तथा 3(x+1) सेमी समकोण बनाती है यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 84 वर्ग सेमी हो तो त्रिभुज की सभी भुजाएं ज्ञात कीजिए।

उत्तर यहाँ भुजाएँ x सेमी व 3(x + 1) सेमी.

प्रश्नानुसार, क्षे.= $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई = 84 वर्ग सेमी

$= \frac{1}{2} \times x \times 3(x+1) = 84$

$3x^2+3x = 168$

$x^2+x = 56$

$x^2 + x - 56 = 0$

$x^2 + 8x - 7x - 56 = 0$

$(x+8)(x - 7) = 0$

या तो $x + 8 = 0$

$x = -8$ (संभव नहीं है)

या $x - 7 = 0$

$x = 7$

अत: एक भुजा x = 7 सेमी

दूसरी भुजा $3(x+1)=3(7+1)$

= 24 सेमी.

तीसरी भुजा = $= \sqrt{(7)^2 + (24)^2}$

$= \sqrt{625} = 25$ सेमी.

20. निम्नलिखित आँकड़े किसी गाँव के 200 परिवारों के कुल मासिक घरेलू व्यय के बंटन को दर्शाते है। इन परिवारों का बहुलक मासिक व्यय ज्ञात कीजिए।

व्यय (रुपयों में)	परिवारों की संख्या	
1000-1500	24 →	f_0
1500-2000	40 →	f_1 बहुलक वर्ग
2000-2500	33 →	f_2
2500-3000	28	
3000-3500	30	
3500-4000	22	
4000-4500	16	
4500-5000	7	

यहाँ बहुलक वर्ग 1500-2000, अधिक बारम्बारता 40

अत: l = 1500 व h = 500

अत: बहुलक $z = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$= 1500 + \left(\frac{40 - 24}{2 \times 40 - 24 - 33}\right) \times 500$

$= 1500 + \frac{16}{23} \times 500 = 1500 + \frac{8000}{23}$

$= 1500 + 347.83 = 1847.83$

अथवा

निम्नलिखित सारणी 400 नियॉन लैम्पो के जीवन काल को प्रदर्शित करती है एक लैंप का माध्यक जीवन काल ज्ञात कीजिए।

जीवन काल में (घंटों में)	लैंपो की संख्या
1500-2000	14
2000-2500	56
2500-3000	60
3000-3500	86
3500-4000	74
4000-4500	62
4500-5000	48

उत्तर

जीवन काल में (घंटों में)	लैंपो की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता (cf)
1500-2000	14	14
2000-2500	56	70
2500-3000	60	130
3000-3500	86	216
3500-4000	74	290
4000-4500	62	352
4500-5000	48	400

$$\Sigma f = 400 = N, \frac{N}{2} = 200$$

यहाँ 200 से ठीक बड़ी $cf = 216$

अत: माध्यक वर्ग 3000-3500 होगा।

जहाँ

$l = 3000$

$cf = 130$

$f = 86$

$h = 500$

अत: माध्यक $M = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - c.f}{f}\right) \times h$

$$= 3000 + \left(\frac{200 - 130}{86}\right) \times 500$$

$$= 3000 + \frac{70 \times 500}{86} = 3000 + \frac{3500}{86}$$

$= 3000 + 406.98 = 3406.98$

अत: माध्यक जीवनकाल $= 3406.98$ घंटे

❖❖❖